Prof. univ. dr. ing. Mircea DEGERATU
Laureat al premiului Hermann Oberth
al Academiei Oamenilor de Știință din România

Conf. univ. dr. ing. Nicolae Ioan ALBOIU

VÂRTEJURILE ÎN MECANICA FLUIDELOR

EDITURA ACADEMIEI OAMENILOR DE ȘTIINȚĂ DIN ROMÂNIA

EDITURA TEHNICĂ

București, 2025

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
DEGERATU, MIRCEA
Vârtejurile în mecanica fluidelor / prof. univ. dr. ing. Mircea Degeratu..., conf. univ. dr. ing. Nicolae Ioan Alboiu. - Bucureşti : Editura Academiei Oamenilor de Ştiinţă din România : Editura Tehnică, 2025
Conţine bibliografie
ISBN 978-630-6518-50-0

ISBN 978-973-31-2422-1

I. Alboiu, Nicolae Ioan

532

Referent științific: CS1 dr. fizician Doru Sabin Delion

Coperta: Arhitect Monica Petre

PREFAȚĂ

Mecanica fluidelor prezintă o importanță crescândă prin aplicațiile sale multiple și variate, concentrând astfel preocupările oamenilor de știință, mai ales în urma progreselor uimitoare realizate în unele dintre aceste aplicații speciale. Astfel, mecanica fluidelor studiază un ansamblu de fenomene care stau la baza a numeroase aplicații în cele mai variate domenii ale activității inginerești și de cercetare științifică.

Studierea vârtejurilor reprezintă un domeniu important din mecanica fluidelor atât din punct de vedere științific cât și din punct de vedere al multiplelor aplicații.

La mișcările fluidelor reale se întâlnesc, adeseori, mișcări de rotație, care conduc la apariția de vârtejuri. Aceste vârtejuri, datorită apariției unor forțe de frecare uneori foarte mici, se descompun în alte numeroase vârtejuri care se propagă în întreaga masă a fluidului. Apariția acestor vârtejuri este datorată, în general, existenței unor discontinuități ale conturului corpurilor solide, sau a unor discontinuități ale vitezei sau ale presiunii. În acest sens, se poate observa apariția de vârtejuri la muchiile unui corp solid aflat într-un curent de fluid, la muchiile unui orificiu din care iese o venă de fluid, sau chiar la mișcarea fluidelor în jurul unor profile cu curbură continuă. De asemenea, se pot observa vârtejuri la scară mare, des întâlnite în natură și anume anafoarele din apele curgătoare, tornadele din atmosferă și trombele dezvoltate deasupra mărilor.

Prezenta carte a fost organizată pe 10 capitole, după cum urmează.

Capitolele 1 și 2 prezintă elemente de calcul vectorial și elemente de cinematica fluidelor folosite la studierea vârtejurilor. Capitolele 3 și 4 se referă la mișcările rotațională și irotațională și la teoremele circulației vitezei. Capitolul 5 prezintă elemente generale privind vârtejurile insistând asupra raportului dintre vorticitate și vârtej. În capitolele 6 și 7 sunt expuse fundamentele teoretice pentru studierea vârtejurilor și respectiv câmpul de viteze indus de vârtejuri. Capitolul 8 este destinat prezentării stratului de vârtejuri și conceptului de pereți fluizi. Ultimele două capitole, 9 și 10, au drept conținut mișcările potențiale cu vârtejuri și respectiv vârtejurile din structura mișcării turbulente.

În toate problemele prezentate, s-a căutat să se ilustreze aplicarea directă a ecuațiilor și teoremelor generale ale mișcării fluidelor pe modele mai mult sau

mai puțin simplificate, dar care conțin și reliefează aspectele caracteristice ale aplicațiilor.

Ținând cont de faptul că, în țara noastră, sunt puține cărți în domeniul vârtejurilor din mecanica fluidelor, au fost incluse în lucrare și unele definiții și probleme generale astfel încât publicația să poată fi folosită și de studenții institutelor de învățământ superior tehnic.

În încheiere, autorii își exprimă speranța că această carte, sub forma prezentată, va îmbogăți literatura științifică din țara noastră și va contribui la formarea de specialiști, constituind un ajutor util atât pentru cei care se ocupă cu activitatea de cercetare prin promovarea unor studii și cercetări în domeniul mecanicii fluidelor cu aplicații la vârtejuri, cât și pentru cei care își pregătesc doctoratul în acest domeniu.

Autorii

CUPRINS

1. ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL 9

1.1. Mărimi scalare. mărimi vectoriale 9

1.2. Operații cu vectori 13

1.3. Elemente generale de teoria câmpurilor și de analiză vectorială 18

1.3.1. Gradient 23

1.3.2. Divergență 26

1.3.3. Rotor 29

1.3.4. Derivata totală a unei funcții vectoriale 31

1.4. Formule de calcul integral pentru operatorii diferențiali 32

2. ELEMENTE DE CINEMATICA FLUIDELOR UTILE LA STUDIEREA VÂRTEJURILOR 35

2.1. Sisteme de reprezentare pentru mișcarea fluidelor (Sistemele Lagrange și Euler) 35

2.1.1. Sistemul Lagrange. Variabilele Lagrange. Traiectoria 35

2.1.2. Sistemul Euler. Variabilele Euler. Linia de curent 37

2.2. Noțiuni generale privind mișcarea irotațională și rotațională 40

2.3. Mișcarea particulei fluide. Descompunerea Helmholtz 43

2.4. Repartiția vârtejurilor la mișcarea Hagen-Poiseuille 47

3. ECUAȚIILE EULER PENTRU MIȘCARE. FORMA LAMB-HELMHOLTZ. MIȘCAREA IROTAȚIONALĂ ȘI MIȘCAREA ROTAȚIONALĂ 51

3.1. Ecuațiile de mișcare ale fluidelor perfecte (Euler). Rotorul vitezei locale 51

3.2. Forma Lamb-Helmholtz a ecuațiilor Euler. punerea în evidență a vorticității 53

3.3. Integrarea ecuațiilor de mișcare ale fluidelor perfecte pentru mișcări irotaționale și elicoidale 55

3.4. Mișcări irotaționale și mișcări rotaționale 56

3.4.1. Mișcări irotaționale (potențiale) 56

3.4.2. Mișcări rotaționale. Ecuația lui Helmholtz 58

4. TEOREMELE CIRCULAȚIEI VITEZEI 63

4.1. Circulația vitezei și fluxul de vorticitate 63

4.2. Teorema lui Stokes 65

4.3. Teorema lui Thomson 67

4.4. Teorema lui Lagrange 71

5. ELEMENTE GENERALE PRIVIND VÂRTEJURILE 73

5.1. Definirea vârtejului și a vorticității 73

5.2. Clasificarea vârtejurilor după vorticitatea curgerii 75

5.3. Vorticitatea stratului limită și separarea cu vârtejuri 80

5.4. Noțiuni fundamentale specifice vârtejurilor și vorticității 82

5.5. Evoluția vârtejurilor în masa de fluid 84

5.6. Concluzii privind raportul dintre vorticitate și vârtej 85

5.7. Măsurarea experimentală a vârtejului. Folosirea vârtejmetrului 87

6. FUNDAMENTE TEORETICE PENTRU STUDIEREA VÂRTEJURILOR 89

6.1. Corelația circulației cu vorticitatea. Teorema lui Stokes 89

6.2. Conservarea circulației la teorema lui Thomson 89

6.3. Conservarea irotaționalității la teorema lui Lagrange 90

6.4. Conservarea rotaționalității la ecuația lui Helmholtz 90

6.5. Teorema a doua a lui Helmholtz (Teorema conservării liniei de vârtej) 91

6.6. Teorema a treia a lui Helmholtz (Teorema conservării intensității tubului de vârtej) 92

6.7. Teorema a treia a lui Helmholtz aplicată unui tub de vârtej infinit subțire 98

6.8. Fluxul de vârtejuri printr-o suprafață 99

6.9. Teorema lui Bjerknes pentru fluide barocline 100

6.10. Mișcări elicoidale (solenoidale) 103

6.11. Difuzia vârtejurilor într-un fluid vâscos incompresibil 104

6.11.1. Ecuația difuziei vârtejurilor 105

6.11.2. Difuzia unui vârtej rectiliniu de intensitate finită 106

7. CÂMPUL DE VITEZE INDUS DE UN SISTEM DE VÂRTEJURI 111

7.1. Distribuția de viteze datorată câmpului de vârtejuri în cazul general. Formula Biot-Savart 111

7.2. Vitezele induse de un tub de vârtej infinit subțire 116

7.3. Exemple de determinare a vitezelor induse de tuburi subțiri de vârtej 119

7.3.1. Determinarea vitezei induse într-un punct de un tub subțire de vârtej de intensitate Γ, având forma unui pătrat cu latura a 119

7.3.2. Determinarea vitezei induse într-un punct de un tub subțire de vârtej de intensitate Γ, având forma unui inel circular cu raza r 120

7.3.3. Determinarea vitezei induse într-un punct situat în interiorul unui tub subțire de vârtej de forma unei potcoave 120

7.3.4. Determinarea vitezei induse într-un punct situat în exteriorul unui tub subțire de vârtej de forma unei potcoave 121

7.4. Vitezele induse de un inel de vârtej 122

7.5. Vârtejurile la aripa de anvergură finită 128

7.5.1. Vârtejuri libere, legate și marginale 128

7.5.2. Rezistența la înaintare indusă 129

7.5.3. Vârtejurile libere și circulația 130

7.5.4. Viteza indusă de ansamblul de vârtejuri 131

7.5.5. Vizualizarea vârtejului marginal al unei aripi 132

7.5.6. Vârtejurile din avalul unei pale de rotor cu ax orizontal (elice sau turbină eoliană) 132

8. STRAT DE VÂRTEJURI. PEREȚI FLUIZI 135

8.1. Strat de vârtejuri ca suprafață de discontinuitate de viteze 135

8.2. Concepția pereților fluizi 138

9. MIȘCĂRI POTENȚIALE CU VÂRTEJURI 145

9.1. Mișcarea irotațională (Mișcarea potențială) 145

9.2. Mișcări potențiale plane 146

9.2.1. Potențialul de viteze și funcția de curent la mișcarea potențială plană 146

9.2.2. Potențialul complex al mișcării. Viteza complexă 147

9.3. Mișcări potențiale plane elementare 150

9.3.1. Mișcarea omogen-uniformă 150

9.3.2. Sursa rectilinie infinită (în plan, sursă punctiformă) 150

9.3.3. Vârtejul rectiliniu infinit (rotația potențială) 152

9.3.4. Vârtejul cu nucleu 153

9.4. Mișcări potențiale compuse cu vârtejuri 154

9.4.1. Mișcarea potențială datorată unei surse și unui vârtej 154

9.4.2. Mișcarea potențială cu sursă și vârtej de tipul cu nucleu 155

9.4.3. Fire de vârtej liniare, paralele, în fluid nerotațional 155

9.4.4. Două fire de vârtej paralele de același sens 158

9.4.5. Două vârtejuri de sens contrar 159

9.4.6. Vârtej în curent paralel 161

9.4.7. Două vârtejuri în curent paralel 162

9.4.8. Deplasarea centrelor unui sistem de vârtejuri 163

9.4.9. Vârtej în prezența unui cerc 164

9.4.10. Vârtej între pereți paraleli 165

9.4.11. Șir de vârtejuri egale și de același sens 167

9.4.12. Strat sau pânză de vârtejuri 168

9.4.13. Șiruri de vârtejuri alternante (aleea de vârtejuri Bénard-Kármán) 169

9.4.14. Vârtejuri repartizate pe un cerc 173

9.4.15. Vârtejuri inelare 174

9.4.16. Mișcarea în jurul cercului cu circulație 175

9.4.17 Efectul Magnus 177

10. VÂRTEJURILE DIN STRUCTURA MIȘCĂRII TURBULENTE 181

10.1. Cascada energiei a lui Kolmogorov 181

10.2. Întinderea firului de vârtej și transferul de energie 185

10.3. Transferul de vorticitate între componentele lui $\vec{\omega}$ și creșterea vorticității prin întinderea tubului de vârtej 187

BIBLIOGRAFIE 189

1

ELEMENTE DE CALCUL VECTORIAL

Mecanica fluidelor, fiind o ramură a mecanicii mediilor continue, folosește pentru studiul și descrierea fenomenelor aparatul matematic specific mecanicii. Deoarece mărimile din alcătuirea relațiilor fizice sunt atât mărimi scalare cât și mărimi vectoriale, operațiile cu aceste mărimi fizice se supun regulilor algebrei și analizei vectoriale.

În continuare se prezintă succint elementele de calcul vectorial utilizate frecvent în cadrul mecanicii fluidelor.

1.1. MĂRIMI SCALARE. MĂRIMI VECTORIALE

Mărimile scalare reprezintă numere cărora, pentru a căpăta un sens fizic, li se asociază o unitate de măsură. De exemplu presiunea, densitatea, temperatura, funcția de curent etc. sunt mărimi scalare.

În studiul fluidelor, mărimile scalare sunt în general funcție de punct, fapt ce conduce la existența unui câmp scalar corespunzător fiecărei mărimi fizice considerare.

Generic, se notează un câmp scalar astfel:

$$S = S(x, y, z) \tag{1.1}$$

în care x, y și z sunt coordonatele sistemului de referință considerat.

Dacă se are în vedere și variabila timp, atunci mărimea fizică scalară depinde atât de punct cât și de momentul considerat, iar relația (1.1) se scrie:

$$S = S(x, y, z, t) \tag{1.2}$$

Densitatea, presiunea, temperatura sau orice altă mărime scalară pot defini câmpuri scalare.

Mărimile vectoriale, sau mai simplu, *vectorii*, sunt descriși prin: mărime, adică valoare lor numerică denumită și modul, direcție și sens. Dintre mărimile vectoriale întâlnite în mecanica fluidelor se dau ca exemplu: viteza, accelerația, forța, rotorul vitezei etc.

Un vector, notat de exemplu $\vec{u}$, este descris prin componentele sale, proiecții ale acestuia, după axele sistemului de referință considerat. Aceste

proiecții perpendiculare, trei la număr în cazul spațiului tridimensional, sunt mărimi scalare. Componentele vectorului u după cele trei direcții se vor nota în continuare ca u_x, u_y și respectiv u_z.

Orice vector poate fi reprezentat sub forma unei matrice.

$$U=\{ux,\ U_y,\ u_z\}\quad \text{sau} \quad \begin{matrix} \\ u_z \end{matrix} \tag{1.3}$$

Trebuie avut însă în vedere că nu orice matrice reprezintă un vector. Pentru a clarifica afirmațiile anterioare se consideră sistemul de axe din figura 1.1.

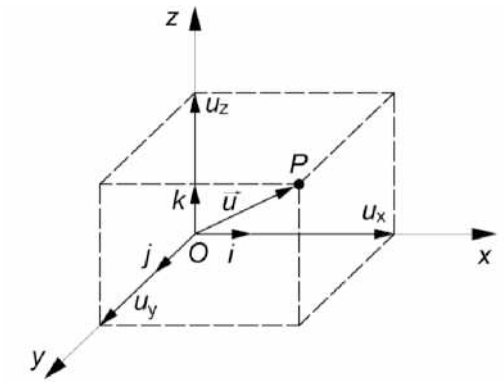


Figura 1.1 Reprezentarea unui vector în sistemul cartezian

Vectorul u este reprezentat prin segmentul de dreaptă orientat având componentele u_x, u_y și u_z. Aceste trei componente reprezintă proiecțiile vectorului pe axele de coordonate Ox, Oy și respectiv Oz. Fiecăreia dintre axe i se asociază vectorii unitate (versorii) notați i, j și respectiv k. Aceștia exprimă direcția axelor fiind și unitatea de măsură pentru un anumit vector considerat. Ansamblul format de cei trei versori se numește *bază*. După direcția axelor de coordonate versorii se exprimă (vectori ortonormați):

$$7 = (1,0,0),\ y = (0,1,0),\ £ = (0,0,1) \tag{1.4}$$

Așadar în sistem cartezian, orice vector poate fi exprimat prin intermediul componentelor sale și a celor trei versori. De exemplu vectorul u se exprimă ca:

$$u — u_x i + u_y j + u_z k \text{ sau } u — u_x + u_y + uz \tag{1.5}$$

în care:

- u_x, u_y, u_z sunt componentele (proiecțiile) scalare ale vectorului u pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz;

- $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ sunt componentele vectorului $\vec{u}$ numite și proiecțiile vectorului $\vec{u}$ pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz.

Poziția unui punct din spațiul cartezian, de exemplu punctul P din figura 1.1, poate fi precizată prin intermediul proiecțiilor vectorului $\vec{u}$ pe axele de coordonate Ox, Oy, Oz. Aceste proiecții, u_x, u_y, u_z, reprezintă coordonatele punctului P în raport cu originea sistemului de axe, punctul O.

Vectorul cu originea în O și vârful în P, vectorul $\overrightarrow{OP}$, și care definește poziția punctului P, se numește *vector de poziție*, și este notat uzual ca $\vec{r}$ (figura 1.2).

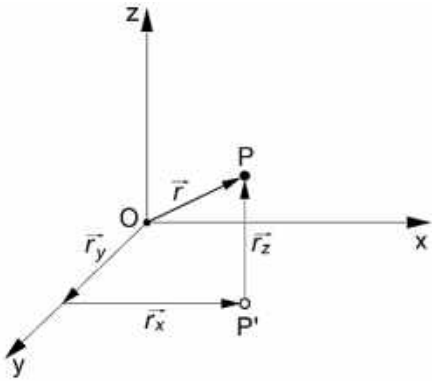


Figura 1.2 Vectorul de poziție $\vec{r}$

Pornind de la figura 1.2 se introduce noțiunea de *cosinusuri directoare*. Acestea reprezintă unghiurile formate de vectorul considerat, în cazul de față vectorul $\vec{r}$, având componentele r_x, r_y, r_z și axele sistemului de referință, Ox, Oy și respectiv Oz.

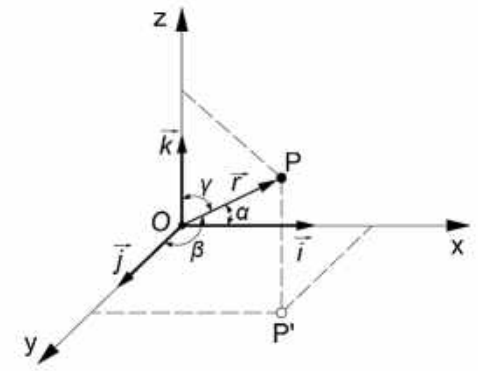


Figura 1.3 Vectorul de poziție $\vec{r}$ și unghiurile directoare α, β și γ

Unghiurile directoare ale vectorului $\vec{r}$ sunt notate în figura 1.3 cu α, β și γ, și reprezintă:

- α - unghiul dintre vectorul $\vec{r}$ și versorul $\vec{i}$;
- β - unghiul dintre vectorul $\vec{r}$ și versorul $\vec{j}$;

- / - unghiul dintre vectorul r și versorul k.

Efectuând produsul dintre vectorul r, având componentele r_x, r_y și respectiv r_z și versorii i, j și respectiv k, se obțin *cosinusurile directoare*.

$$> x, \, y, \, r_z \;) \;,$$

ținând cont de relațiile (1.4) se poate scrie

$$\begin{aligned} (\; rx, \, ry, rz \;) \bullet (1,0,0) &= r \cos a \\ (\; rx, \, ry, rz \;) \bullet (0,1,0) &= r \cos / ? \\ (\; rx, \, ry, rz \;) \bullet (0,0,1) &= r \cos / \end{aligned} \qquad (1.6)$$

din care rezultă

$$r_x = \text{rc os}a, \; r_y = \text{rc os}/?, \; r_z = \text{rc os}/, \qquad (1.7)$$

iar în final se obțin cele trei *cosinusuri directoare*:

$$\cos a = / \; , \; \cos fi = p| \; , \; \cos / = \wedge \qquad (1.8)$$

în care r reprezintă mărimea (modulul) vectorului r. În consecință, aceste relații se pot rescrie după cum urmează:

$$\begin{aligned} \cos a &= \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \\ \cos fi &= \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \\ \cos Y &= \frac{rz}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \end{aligned} \qquad (1.9)$$

Pornind de la aceste relații orice vector poate fi exprimat ca versor. Astfel, vectorul r se poate scrie:

$$r \quad ri \, r_y J \, rk \quad = \wedge i + \wedge x \, j + k = cosa \, i + cos \, fi \, j + cosyk \qquad (1.10)$$
$$r \quad r \, r \, r \quad r \, r \, r$$

Ținând cont de relația (1.10), pentru un vector unitar V, se poate scrie:

$$V - \cos a\, i + \cos P\, j + \cos yk - \text{^}\cos^2 a + \cos^2 P + \cos^2 / = 1 \qquad (1.11)$$

iar în final rezultă relația

$$\cos^2 a + \cos^2 P + \cos^2 / = 1 \qquad (1.12)$$

Revenind la figura 1.1 și figura 1.2, vectorul de poziție r poate fi exprimat prin una din relațiile:

$$r = r + r_{x\,y\,z} + r$$

$$r = xi + yj + zk$$

$$OP = xi + yj + zk$$

$$OP = r\, i\, cos(i,\text{rj} + j\, cos(j,r\text{^} + k\, cos[k,r\text{^}$$

Mărimea (lungimea) unui vector se exprimă prin relația:

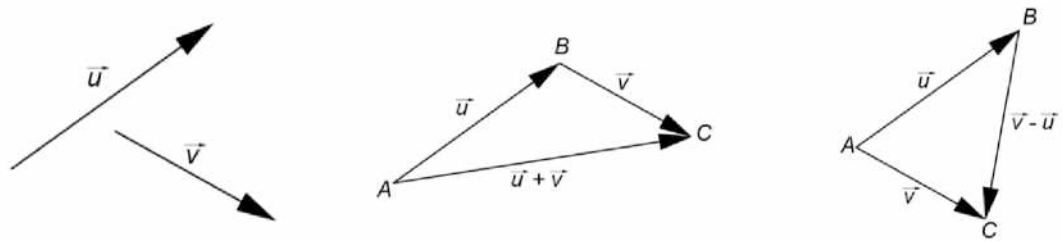
$$OP\backslash - \backslash r = r - Ju^* + iiy + ul — \backslash u - u \qquad (1.13)$$

1.2. OPERAȚII CU VECTORI

Suma a doi vectori oarecare, u respectiv v, va avea ca rezultat tot un vector notat 5 (figura 1.4, b).

$$u + v = s \qquad (1.14)$$

Conform notațiilor in figura1.4, b, relația anterioară se poate scrie și ca $\check{A}c\backslash = |\check{A}\check{a}| + \backslash BC$.



(a) (b) (c)

Figura 1.4 Suma și diferența a doi vectori oarecare

Scriind vectorii ce alcătuiesc relația (1.14) pe componente, aceasta capătă forma:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x + v_x \\ u_y + v_y \\ u_z + v_z \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

sau

$$s = (u_x + v_x)\vec{i} + (u_y + v_y)\vec{j} + (u_z + v_z)\vec{k} \tag{1.16}$$

Diferența a doi vectori oarecare, $\vec{u}$ respectiv $\vec{v}$, va avea ca rezultat vectorul $\vec{d}$ (figura 1.4, c).

$$\vec{v} + (-\vec{u}) = \vec{d} \tag{1.17}$$

care, ținând cont de notațiile din figura 1.4, c mai poate fi exprimat și ca $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AC}| - |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| + |\overrightarrow{BA}|$.

Relația (1.17) se poate scrie și ca:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x - u_x \\ v_y - u_y \\ v_z - u_z \end{pmatrix} \tag{1.18}$$

sau

$$d = (v_x - u_x)\vec{i} + (v_y - u_y)\vec{j} + (v_z - u_z)\vec{k} \tag{1.19}$$

Produsul dintre doi vectori poate fi efectuat în mai multe moduri prezentate sintetizat în tabelul 1.1.

Tabelul 1.1 Produsul dintre doi vectori oarecare $\vec{u}$ și $\vec{v}$

Tipul produsului	Notație folosită	Rezultat	Definire
Produs scalar	$\vec{u} \cdot \vec{v}$	mărime scalară	$uv\cos\theta$
Produs vectorial	$\vec{u} \times \vec{v}$	mărime vectorială	$uv\lvert\sin\theta\rvert\vec{n}$

în care:

θ este unghiul interior format de cei doi vectori ($0 \le \theta \le \pi$);

$\vec{n}$ - versorul normalei la cei doi vectori, al cărui sens este determinat prin regula mâinii drepte.

Produsul scalar a doi vectori este o mărimea scalară obținută prin înmulțirea modulelor celor doi vectori cu cosinusul unghiului intern format de aceștia.

Se dau vectorii oarecare $\vec{u}$ și $\vec{v}$:

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k};\ \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{1.20}$$

în care: $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$ sunt vectorii unitari dirijați după direcția axelor Ox, Oy și Oz ale triedrului drept al sistemului de coordonate cartezian, iar u_x, u_y, u_z și v_x, v_y, v_z sunt proiecțiile acestor doi vectori pe direcția axelor de coordonate.

Astfel, produsul scalar al celor doi vectori se va scrie:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = uv\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = uv\cos\theta\,. \tag{1.21}$$

Dacă se consideră componentele celor doi vectori de pe axele de coordonate, produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ rezultă prin însumarea produselor componentelor acestor vectori (relația 1.22),

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \left(u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}\right)\cdot\left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right) = u_xv_x + u_yv_y + u_zv_z \tag{1.22}$$

iar, în consecință, produsul scalar $\vec{u}\cdot\vec{u} = u^2$.

Din punct de vedere geometric, produsul scalar reprezintă produsul dintre valoarea absolută a unuia dintre vectori ($\vec{u}$) cu proiecția celui de al doilea ($\vec{v}$) pe direcția primului vector ($\vec{u}$) (figura 1.5).

(a) (b)

Figura 1.5 Produsul scalar – reprezentare geometrică

În cazul particular în care vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ sunt perpendiculari unul față de celălalt ($\vec{u}\perp\vec{v}$), produsul lor scalar este zero ($\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$).

Produsul scalar a doi vectori este *comutativ*. În consecință se poate scrie următoarea egalitate:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u} = vu\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right) = uv\cos\theta \tag{1.23}$$

O altă proprietate este aceea că produsul scalar este *distributiv* în raport cu adunarea. Se consideră cei trei vectori oarecare $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} \tag{1.24}$$

Produsul dintre un vector $\vec{u}$ și un scalar a are ca rezultat o mărime vectorială a cărei sens va coincide cu cel al vectorului dacă $a>0$, și va fi de sens opus dacă $a<0$.

$$a\cdot\vec{u}=|a|\cdot\left|\vec{u}\right|=a\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\u_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cdot u_x\\a\cdot u_y\\a\cdot u_z\end{pmatrix} \tag{1.25}$$

În cazul versorilor $\vec{i}$, $\vec{j}$ și $\vec{k}$, produsul scalar conduce la următorul set de relații:

$$\begin{gathered}\vec{i}\cdot\vec{i}=i^2=1;\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=j^2=1;\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=k^2=1\\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0\end{gathered} \tag{1.26}$$

Produsul vectorial a doi vectori oarecare, ($\vec{u}$ și $\vec{v}$) are ca rezultat un alt vector, ($\vec{w}$) a cărui direcție este perpendiculară pe planul format de cei doi vectori ce îl determină (figura 1.6). Valoarea absolută a acestui vector, rezultat în urma aplicării produsului vectorial, este egală cu aria paralelogramului format de cei doi vectori, în acest caz vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

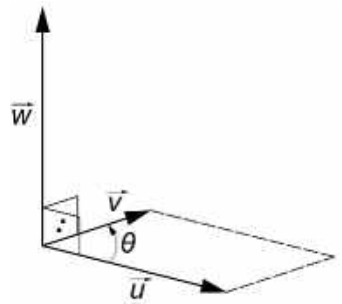


Figura 1.6 Produsul vectorial

Produsul vectorial se notează

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{w} \tag{1.27}$$

iar mărimea vectorului rezultat este

$$\left|\vec{w}\right|=w=uv\sin\left(\vec{u},\vec{v}\right)=uv\sin\theta \tag{1.28}$$

Produsul vectorial este *distributiv* în raport cu adunarea, proprietate care se exprimă prin relația:

$$U X\hat{}V + \quad - U X V + U X W . \tag{1.29}$$

Produsul vectorial **nu** este *comutativ*. Acest fapt se justifică prin schimbarea de sens (semn) a vectorului w, rezultată odată cu schimbarea ordinii de înmulțire a vectorilor u și v, (regula mâinii drepte).

$$uxv = —vxu \tag{1.30}$$

Efectuând produsele vectoriale dintre versorii i, j și k se obțin următoarele egalități:

$$ixi = j \text{ x } j = kxk = 0 \tag{1.31}$$

$$\begin{aligned} i \text{ x } j &= —j\, xi = k \\ j\, xk &= -kx\, j = i \\ kxi &- —i*k = j \end{aligned} \tag{1.32}$$

Scriind vectorii u și v cu proiecțiile lor după cele trei axe de coordonate, relația (1.30) devine

$$\begin{aligned} u \text{ x } v &= (u_x i + u_y i + u_z k) \text{ x } (v\, i + v_y j + v_z k) = \\ &= (u_y v_z - u_z v_y) i + (u_z v_x - u_x v_z) j + (u_x v_y - u_y v_x) k \end{aligned} \tag{1.33}$$

sau sub altă formă

$$\begin{vmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{vmatrix} \text{x} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_y V_z - u_z V_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ U_x V_y - u_y V_x \end{vmatrix} \tag{1.34}$$

Relația produsului vectorial dintre doi vectori mai poate fi scrisă sub forma unui determinant:

$$uxv = —vxu = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & & u_z \\ V_x & V & V_y \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

Produsul a trei vectori, $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$, dat prin relația

$$\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\cdot\vec{w}=uv\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\vec{w}=\left(uv\cos\theta\right)\vec{w} \tag{1.36}$$

în care θ reprezintă unghiul dintre vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$, este un vector dependent de ordinea efectuării operațiilor. În cazul de față, rezultatul produsului este un vector paralel cu $\vec{w}$.

Produsul mixt al celor trei vectori, $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$, se exprimă ca:

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\vec{v}\cdot\left(\vec{w}\times\vec{u}\right)=\vec{w}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{v}\right)=-\vec{u}\cdot\left(\vec{w}\times\vec{v}\right)=-\vec{v}\cdot\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)=-\vec{w}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{u}\right) \tag{1.37}$$

Rezultatul este o mărime scalară care, din punct de vedere geometric, într-un sistem cartezian de reprezentare, semnifică volumul paralelipipedului descris de ansamblul format de cei trei vectori $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$.

Deși este evident, se precizează că produsul mixt a trei vectori este zero dacă doi dintre aceștia sunt paraleli.

Similar relației (1.35), și relația (1.37) poate fi pusă și sub forma unui determinat.

$$\vec{u}\cdot\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix} \tag{1.38}$$

Dublul produs a trei vectori, $\vec{u}$, $\vec{v}$ și $\vec{w}$, va avea ca rezultat tot un vector dat de următoarea relație

$$\vec{k}=\vec{u}\times\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)=\left(\vec{w}\cdot\vec{u}\right)\times\vec{v}-\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)\vec{w}, \tag{1.39}$$

din care rezultă

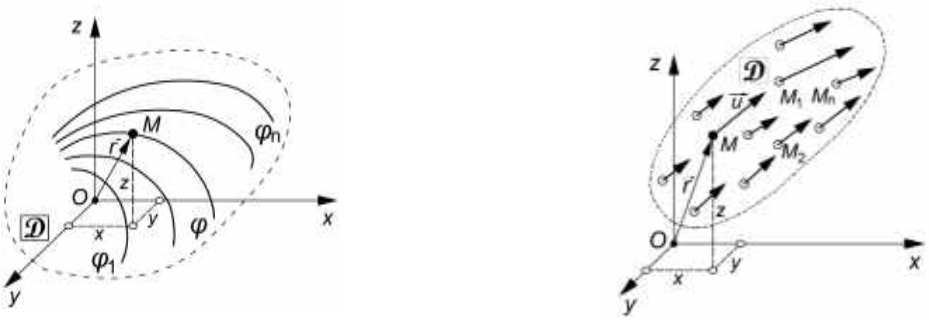
$$\vec{u}\left(\vec{v}\cdot\vec{w}\right)=\vec{u}\times\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\cdot\vec{u}\right)\vec{w}. \tag{1.40}$$

1.3. ELEMENTE GENERALE DE TEORIA CÂMPURILOR ȘI DE ANALIZĂ VECTORIALĂ

Se consideră un domeniu $\mathscr{D}$ din spațiu tridimensional. Fiecărui punct al acelui domeniu i se poate asocia o mărime scalară, sau un vector al cărui valoare numerică și orientare sunt bine determinate.

Un punct oarecare M din domeniul $\mathscr{D}$ se raportează la un sistem de referință Oxyz prin coordonatele x, y și z sau prin vectorul de poziție $\vec{r}$ ($\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$) de mărime $|\mathrm{OM}|$, de direcție OM și de sens de la O către M.

În funcție de natura mărimii atașate punctelor domeniului $\mathscr{D}$, acesta va reprezenta un *câmp scalar* (figura 1.7, a) sau un *câmp vectorial* (figura 1.7, b).



(a) (b)

Figura 1.7 Reprezentarea câmpului scalar (a) și a câmpului vectorial (b)

Așadar, considerând funcția scalară φ, cu o valoare numerică bine determinată în fiecare punct, $\varphi(x,y,z) = \varphi(r)$, conform figurii 1.7, a, *câmpurile scalare* pot fi reprezentate prin suprafețele $\Phi(x,y) = \text{constant}$. Aceste suprafețe sunt numite *suprafețe de nivel*, în cazul reprezentării tridimensionale, sau *linii de nivel*, $\Phi(x,y) = \text{constant}$, pentru reprezentarea în plan.

Dacă fiecărui punct al domeniului $\mathscr{D}$, din spațiu, i se atribuie un vector $\vec{u}$ atunci funcția $\vec{U} = \vec{U}(\vec{r})$ sau $\vec{U} = \vec{U}(x,y,z)$, definește un câmp vectorial (figura 1.7, b).

Reprezentarea câmpurilor vectoriale poate fi făcută prin scrierea funcțiilor vectoriale descompuse după direcțiile de coordonate. Pentru o funcție oarecare $\vec{U}(\vec{r})$ se scrie:

$$\vec{U}(x,y,z) = U_x(x,y,z)\vec{i} + U_y(x,y,z)\vec{j} + U_k(x,y,z)\vec{k} \qquad (1.41)$$

relația exprimând un *câmp staționar,* sau, dacă se consideră și variabila timp, relația (1.41) devine:

$$\vec{U}(x,y,z,t) = U_x(x,y,z,t)\vec{i} + U_y(x,y,z,t)\vec{j} + U_k(x,y,z,t)\vec{k} \qquad (1.42)$$

și exprimă în acest caz un *câmp nestaționar*.

În relațiile (1.41) și (1.42), U_x, U_y și U_z sunt câmpuri scalare, numite *câmpuri de componente*. Pentru a determina un câmp vectorial, este necesară determinarea câmpurilor, funcțiilor, componente.

Diferențierea unei funcții vectoriale, $du(x,y,z)$, se exprimă astfel:

$$du = du_x i + du_y j + du_k k \tag{1.43}$$

în care

$$\begin{aligned} d u_x &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du_x}{dz} dz \\ d u_y &= \frac{d u_y}{dx} dx + \frac{d u_y}{dy} dy + \frac{d u_y}{dz} dz \\ d u_z &= \frac{du_z}{dx} dx + \frac{du_z}{dy} dy + \frac{du_z}{dz} \end{aligned} \tag{1.44}$$

Dacă vectorul ce definește câmpul depinde și de timpul t, relațiile anterioare vor fi scrise în forma (1.45).

$$\begin{aligned} d u_x &= \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt \\ d u_y &= \frac{d u_y}{dx} dx + \frac{du_y}{dy} dy + \frac{du_y}{dz} dz + \frac{du_y}{dt} dt \\ d u_z &= \frac{du_z}{dx} dx + \frac{du_z}{dy} dy + \frac{du_z}{dz} dz + \frac{du_z}{dt} dt \end{aligned} \tag{1.45}$$

Problema privind diferențierea funcției vectoriale, s-a redus astfel la diferențierea funcțiilor scalare u_x, u_y și u_z.

O altă abordare privind diferențierea funcțiilor vectoriale o reprezintă introducerea diferențelor finite și trecerea la limită. Considerând funcția vectorială $u(x,y,z)$ se scrie:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y, z) - u(x,y,z)}{\Delta x} = \frac{du}{dx} i + \frac{du}{dx} j + \frac{du}{dx} k \\ \frac{du}{dy} &= \frac{du}{dy} i + \frac{du}{dy} j + \frac{du}{dy} k \\ \frac{du}{dz} &= \frac{du}{dz} i + \frac{du}{dz} j + \frac{du}{dz} k \end{aligned} \tag{1.46}$$

În cazul în care trebuie considerată și variabila timp, $u(x,y,zg)$, grupul de relații (1.46) va fi completat după cum urmează: