

---

# **EQUILIBRAGE DYNAMIQUE ; APPORTS D'UNE METROLOGIE A SIX DIMENSIONS EN PRODUCTION**

**C. BÎȘU<sup>1A</sup>, O. CAHUC<sup>2B</sup>,  
M. ZAPCIU<sup>1C</sup>, A. GERARD<sup>2D</sup>**

---

<sup>1</sup> University POLITEHNICA of Bucharest, RSP Department, 313 Splaiul Independentei, 060042, Bucharest, Romania

<sup>2</sup> Université de Bordeaux – CNRS UMR 5295, 351 cours de la Libération, 33400 Talence cedex, France

<sup>A</sup> Maître de conférences, Dr, Eng. e-mail : [claudiu.bisu@upb.ro](mailto:claudiu.bisu@upb.ro)

<sup>B</sup> Prof., Dr. e-mail : [olivier.cahuc@u-bordeaux.fr](mailto:olivier.cahuc@u-bordeaux.fr)

<sup>C</sup> Prof., Dr, Eng., e-mail : [miron.zapciu@upb.ro](mailto:miron.zapciu@upb.ro)

<sup>D</sup> Prof., Dr. e-mail : [alain.gerard@u-bordeaux.fr](mailto:alain.gerard@u-bordeaux.fr)

---

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**  
**Equilibrage dynamique : apports d'une métrologie à six dimensions en**

**production** / Claudiu Bîșu, Olivier Cahuc, Miron Zapciu, Alain Gerad. -

București : Editura Academiei Oamenilor de Știință din România, 2020

Conține bibliografie

ISBN 978-606-8636-78-8

I. Bîșu, Claudiu

II. Cahuc, Olivier

III. Zapciu, Miron

IV. Gerad, Alain

62

---

# TABLE DES MATIERES

<b>AVANT-PROPOS.....</b>	<b>8</b>
<b>ENVIRONNEMENT MATHEMATIQUE .....</b>	<b>14</b>
<b>1 ANALYSE VECTORIELLE .....</b>	<b>14</b>
<b>1.1 Rappel sur les espaces vectoriels</b>	<b>14</b>
1.1.1 Espace vectoriel Euclidien.....	14
1.1.2 Espace affine .....	14
1.1.3 Repère de référence dans un espace affine.....	15
1.1.4 Pointeurs.....	16
1.1.5 Champ scalaire et champ vectoriel .....	16
1.1.6 Produit scalaire.....	16
1.1.7 Produit vectoriel ou produit en « croix » .....	16
1.1.8 Moment en un point .....	17
<b>2 TORSEUR .....</b>	<b>17</b>
<b>2.1 Champ antisymétrique</b>	<b>17</b>
<b>2.2 Définition d'un torseur</b>	<b>18</b>
<b>2.3 Propriétés</b>	<b>18</b>
<b>2.4 Invariants</b>	<b>19</b>
<b>2.5 Torseurs associés à une suite de pointeurs</b>	<b>19</b>
<b>2.6 Axe central</b>	<b>19</b>
<b>PARTIE 1 TOURNAGE .....</b>	<b>20</b>
<b>3 NOMENCLATURE.....</b>	<b>20</b>
<b>4 UN EXEMPLE D'EQUILIBRAGE STATIQUE ET METROLOGIE.....</b>	<b>26</b>
<b>4.1 Introduction</b>	<b>26</b>
<b>4.2 Composants du système POM</b>	<b>28</b>
4.2.1 Bloc pièce : BP .....	28
4.2.2 Bloc outil : BO .....	31
<b>4.3 Caractérisation statique du système usinant</b>	<b>32</b>
4.3.1 Matrice globale des raideurs .....	32
4.3.2 Détermination expérimentale de la matrice des raideurs.....	34
4.3.3 Détermination expérimentale de la matrice des raideurs du système usinant .....	41
<b>4.4 Centre de rotation</b>	<b>43</b>
4.4.1 Etape expérimentale .....	44
4.4.2 Comparaison avec la matrice de rigidité.....	48
<b>4.5 Conclusion de cette section</b>	<b>49</b>

---

---

<b>5 CARACTERISATION DYNAMIQUE.....</b>	<b>50</b>
<b>5.1 Introduction</b>	<b>50</b>
<b>5.2 Tâches pour effectuer l'analyse des fréquences</b>	<b>54</b>
5.2.1 Détermination du spectre des fréquences.....	54
5.2.2 Numérisation des signaux mesurés.....	55
<b>5.3 Analyse expérimentale des vibrations</b>	<b>56</b>
5.3.1 Dispositif expérimental.....	56
5.3.2 Bloc outil : BO .....	58
5.3.3 Résultats expérimentaux .....	58
<b>5.4 Modèle numérique du montage de la broche du tour Ernault HN400</b>	<b>61</b>
<b>5.5 Analyse expérimentale des vibrations et comparaison des broches des tours Ernault HN400, Cazeneuve HB CNC2 et Ramo RTN 30</b>	<b>63</b>
<b>5.6 Résultats expérimentaux sur la fréquence de segmentation des copeaux en tournage</b>	<b>68</b>
<b>5.7 Caractérisation dynamique des machines-outils : recommandations pour le processus de tournage</b>	<b>72</b>
5.7.1 Une analyse selon trois configurations .....	72
5.7.2 Gérer au mieux le processus de coupe .....	74
<b>6 ANALYSE DES DEPLACEMENTS.....</b>	<b>76</b>
<b>6.1 Introduction</b>	<b>76</b>
<b>6.2 Protocole des essais pour la mesure des déplacements</b>	<b>78</b>
6.2.1 Approche.....	78
6.2.2 Dispositif expérimental.....	79
6.2.3 Protocole d'acquisition des données.....	81
<b>6.3 Essais et analyses</b>	<b>83</b>
6.3.1 Conditions expérimentales .....	83
6.3.2 Déplacements pièce/outil/copeau.....	84
6.3.3 Analyse de la fréquence des déplacements liés à la pointe de l'outil.....	88
<b>6.4 Plan des déplacements de la pointe de l'outil</b>	<b>90</b>
6.4.1 Analyse des données accélérométriques .....	90
6.4.2 Localisation du plan des déplacements de la pointe de l'outil.....	91
<b>6.5 Analyse des déplacements de la pointe de l'outil</b>	<b>92</b>
6.5.1 Comparaison des processus stable et instable .....	92
6.5.2 Contrôle de phase entre les composantes des déplacements de la pointe de l'outil .....	93
6.5.3 Approximation de l'ellipse des déplacements de la pointe de l'outil .....	94
<b>6.6 Discussion sur les aspects statiques et dynamiques</b>	<b>95</b>
6.6.1 Corrélation rigidité/déplacements .....	95
6.6.2 Corrélation entre déplacements de l'outil/centre de rigidité .....	96

---

6.6.3	Corrélation entre centre de rigidité et axe central du processus dynamique en tournage .....	98
<b>6.7</b>	<b>Conclusion de cette section</b>	<b>99</b>
<b>7</b>	<b>ANALYSE DES FORCES ET DES MOMENTS.....</b>	<b>100</b>
<b>7.2</b>	<b>Analyse des forces</b>	<b>103</b>
7.2.1	Résultats des essais .....	103
7.2.2	Résultats de l'analyse des actions de coupe .....	104
7.2.3	Analyse des fréquences.....	107
7.2.4	Décomposition des forces.....	109
7.2.5	Détermination du plan attaché aux points d'application des forces .....	111
<b>7.3</b>	<b>Analyse des moments</b>	<b>113</b>
7.3.1	Résultats expérimentaux .....	113
7.3.2	Analyse fréquentielle des moments.....	114
7.3.3	Etude des moments à la pointe de l'outil .....	116
<b>7.4</b>	<b>Axe central</b>	<b>120</b>
7.4.1	Détermination de l'axe central.....	120
7.4.2	Analyse des moments liés à l'axe central.....	121
<b>7.5</b>	<b>Géométrie de la pièce et du copeau</b>	<b>126</b>
7.5.1	Mesures de rugosité .....	126
7.5.2	Caractéristiques du copeau.....	128
<b>7.6</b>	<b>Corrélation entre les déplacements de la pointe de l'outil et les forces appliquées</b>	<b>130</b>
7.6.1	Corrélation entre le plan des déplacements de la pointe de l'outil et les forces appliquées ...	131
7.6.2	Vibrations auto-entretenues : validation expérimentale .....	132
<b>7.7</b>	<b>Conclusion du chapitre 7</b>	<b>135</b>
<b>PARTIE 2</b>	<b>PERÇAGE .....</b>	<b>137</b>
<b>9</b>	<b>NOMENCLATURE.....</b>	<b>137</b>
<b>10</b>	<b>INTRODUCTION .....</b>	<b>138</b>
<b>11</b>	<b>MODELE GEOMETRIQUE.....</b>	<b>140</b>
<b>11.1</b>	<b>Présentation</b>	<b>140</b>
<b>11.2</b>	<b>Le positionnement de la meule</b>	<b>141</b>
<b>11.3</b>	<b>Génération et calcul des goujures</b>	<b>145</b>
<b>11.4</b>	<b>Génération et calcul des arêtes de coupe</b>	<b>149</b>
<b>11.5</b>	<b>Description géométrique de l'arête</b>	<b>151</b>
<b>11.6</b>	<b>Validation du modèle : comparaison avec un modèle de CAO</b>	<b>156</b>
<b>11.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>158</b>
<b>12</b>	<b>MODELE DE COMPORTEMENT .....</b>	<b>159</b>
<b>12.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>159</b>

---

---

<b>12.2 Moyens expérimentaux</b>	<b>160</b>
12.2.1 Mesure du torseur des actions mécaniques.....	160
12.2.2 Prototype .....	161
12.2.3 Relation entre les paramètres de réglage du prototype et les angles de coupe .....	163
12.2.4 Protocole expérimental.....	166
12.2.5 Conception de l'expérience .....	167
<b>12.3 Modèle de comportement</b>	<b>170</b>
<b>12.4 Résultats et discussion</b>	<b>172</b>
12.4.1Présentation .....	172
12.4.2 Analyse de deux géométries de pointes différentes .....	175
12.4.3 Simulation de défaut de coaxialité.....	177
<b>12.5 Conclusion</b>	<b>178</b>
<b>13 MODELE PHENOMENOLOGIQUE.....</b>	<b>179</b>
<b>13.1 Présentation</b>	<b>179</b>
<b>13.2 Une étude des phénomènes de coupe utilisant des perturbations externes</b>	<b>179</b>
13.2.1 Méthodologie expérimentale .....	180
13.2.2 Caractéristiques expérimentales.....	180
13.2.3 Paramètres d'entrée et de sortie.....	181
13.2.4 Analyse des signaux de sortie .....	183
13.2.5 Corrélation de sortie du système de perçage .....	185
13.2.6 Discussion.....	187
<b>13.3 Etude de la qualité des trous percés</b>	<b>188</b>
13.3.1 Expérience de sortie de perçage.....	188
13.3.2 Influence du foret sur les caractéristiques du trou.....	188
<b>13.4 Axe central : un nouvel outil d'analyse pour comprendre les phénomènes de perçage</b>	<b>192</b>
13.4.1 Evolution de l'axe central.....	193
13.4.2 Corrélations entre l'axe central et la rugosité.....	196
<b>14 CONCLUSION DE CETTE PARTIE.....</b>	<b>198</b>
<b>15 CONCLUSION ET PERSPECTIVES.....</b>	<b>198</b>
<b>PARTIE 3 FRAISAGE.....</b>	<b>200</b>
<b>16 NOMENCLATURE.....</b>	<b>200</b>
<b>17 INTRODUCTION .....</b>	<b>201</b>
<b>18 APPROCHE EXPERIMENTALE .....</b>	<b>203</b>
<b>18.1 Dispositifs expérimentaux</b>	<b>203</b>
<b>18.2 Résultats de l'approche expérimentale précédente</b>	<b>206</b>
<b>18.3 Densités de coupe</b>	<b>208</b>

---

<b>18.4 Section instantanée réelle du copeau non déformé, <math>A_{\text{copeau}}(t)</math></b>	<b>209</b>
18.4.1 Analyse du calcul de l'épaisseur du copeau .....	209
18.4.2 Avance radiale instantanée réelle $\Delta e_r(t)$ et section de copeau non déformé $A_{\text{copeau}}(t)$ .....	211
18.4.3 Résultats .....	213
<b>19 DEUXIEME APPROCHE EXPERIMENTALE .....</b>	<b>215</b>
<b>19.1 Introduction</b>	<b>215</b>
<b>19.2 Outil, plan des expériences</b>	<b>215</b>
<b>19.3 Densités de coupe</b>	<b>217</b>
<b>20 ANALYSE ET RESULTATS .....</b>	<b>220</b>
<b>20.1 Approche expérimentale</b>	<b>220</b>
20.1.1 Mesure des efforts de coupe .....	220
20.1.2 Mesure du moment de coupe .....	220
20.1.3 Densités des moments de coupe .....	223
<b>20.2 Modèle de la densité des moments</b>	<b>226</b>
<b>20.3 Bilan énergétique</b>	<b>228</b>
<b>21 CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>231</b>
<b>ANNEXE .....</b>	<b>233</b>
<b>22.1 Détermination du plan des déplacements fixés à la pointe de l'outil</b>	<b>233</b>
<b>22.2 Approximation de l'ellipse</b>	<b>234</b>
<b>22.3 Détermination du plan lieu des points d'application de la charge sur l'outil</b>	<b>236</b>
<b>22.4 APPROXIMATION DE L'ELLIPSE</b>	<b>238</b>
<b>REMERCIEMENTS .....</b>	<b>238</b>
<b>R E F E R E N C E S .....</b>	<b>238</b>

---

## Avant-propos

Les pièces fabriquées à symétries circulaires ont toujours des défauts de répartition des masses malgré le soin apporté à leur fabrication. Leurs mises en rotation, notamment rapide, autour de leur axe de symétrie engendre des effets très néfastes en provenance des forces centrifuges.

Par exemple, il est bien connu des automobilistes qu'une roue non équilibrée dynamiquement engendre des vibrations, ressenties dans le volant et dans tout le véhicule. Elles sont d'autant plus importantes que la vitesse du véhicule est élevée. Ces vibrations sont très dangereuses, peuvent détériorer certains éléments de structure et aller jusqu'à engendrer la rupture de certaines pièces, elles jouent sur la tenue de route etc. Pour y remédier il est nécessaire de placer des masses judicieusement choisies à l'opposé des balourds pour neutraliser les effets néfastes de ceux-ci en ramenant ainsi le centre de rotation de la roue sur l'axe de rotation de celle-ci. L'équilibrage dynamique des pièces tournantes consiste donc à déterminer le centre instantané de rotation de l'objet à équilibrer, puis à ramener celui-ci sur l'axe de rotation réel de la pièce tournante. L'équilibrage dynamique est un élément très important de la phase de finition de l'élaboration des objets symétriques, qui joue sur les vibrations des machines-outils, l'usure, la sécurité, le confort et surtout sur la préservation des éléments mécaniques soumis aux vibrations.

Pour arriver à connaître avec toute la précision nécessaire la position et la nature (poids) du balourd, il est indispensable de posséder des outils de métrologie adaptés. Ces outils doivent pouvoir mesurer simultanément les forces et les moments (ou couples) exercés sur les pièces en rotation. Ces forces et moments sont regroupés en un seul outil mathématique appelé

---



torseur. Ces efforts sont acquis par un dynamomètre à six composantes (Couétard 1993, 2000) qui permet d'obtenir simultanément les trois composantes des forces et les trois composantes des moments agissant dans un repère donné et en un point donné. Le concept de torseur joue un rôle central pour les développements qui suivent. Il fait l'objet d'un rappel dans la première partie : environnement mathématique.

De nos jours, le procédé majeur de la fabrication d'objets ou de structures reste encore l'enlèvement de matière même s'il intervient à l'issue d'une génération de brut par fabrication additive. Cependant, dans les processus d'usinage utilisés (tournage, perçage, fraisage etc.), l'enlèvement de matière est généralement accompagné de mouvement de translation (mouvement linéaire) et de rotation (mouvement circulaire).

Au travers du principe des travaux virtuels, ces mouvements de translation et de rotation sont mathématiquement parlant les éléments duaux des forces et des moments. La prise en compte de cette dualité nous conduit à ne pas nous restreindre au seul concept de force mais à prendre en compte systématiquement le concept de moment (ou de couple) dans les processus de fabrication par enlèvement de matière au travers de la notion de torseur. Dans de nombreux cas d'usinage, s'affranchir des moments conduit à négliger de 40% à 80% de la puissance mécanique et donc électrique consommée dans le processus d'enlèvement de matière selon les matériaux utilisés (Cahuc et al., 2001). Ainsi, il a été démontré que la prise en compte des forces et des moments conduit à des rendements des machines-outils tout à fait comparable à ceux des moteurs électrique traditionnels (Cahuc et al., 2001; Dagnat et al., 2008) contrairement aux idées reçues issues de la négligence des couples.

Avec la considération de ces résultats, il est clair qu'une modélisation complète de l'enlèvement de matière doit tenir compte simultanément des

---

concepts de force et de moment nécessairement concernés dans les processus de fabrication (Cahuc, 2005). En d'autres termes, une réelle modélisation tri-dimensionnelle de la coupe des matériaux doit nécessairement faire appel aux concepts de force et de moment, ou mieux de torseur, avec toutes les conséquences que cela impose. C'est un des objectifs de ce livre qui est basé sur des travaux de ces dernières décades avec en particulier trois exemples d'applications : le tournage (partie 1), le perçage (partie 2) et le fraisage (partie 3).

Evidemment la métrologie joue un rôle fondamental pour atteindre le but d'une modélisation de la coupe tri-dimensionnelle. Aussi, un large espace est réservé aux efforts (torseur) de coupe. Ceux-ci sont acquis par un dynamomètre à six composantes qui nous permet d'obtenir simultanément les trois composantes des forces et les trois composantes des moments (couples) agissant dans un repère donné et en un point donné. Le concept de torseur joue un rôle central pour les développements qui suivent. Les translations et les rotations sont mesurées par la même voie. Dans le cas du tournage, en particulier, une excellente corrélation est établie entre les efforts (forces et moments) et les déplacements (translations et rotations).

Ce livre est structuré en quatre éléments indépendants. Chacun a sa propre nomenclature. Le premier présente l'environnement mathématique, les outils et les notations utilisés dans la suite de l'ouvrage. L'analyse vectorielle et le concept de torseur y sont rappelés. Aussi, le lecteur familiarisé avec ces concepts peut se rendre directement à la première partie (équilibre dynamique, tournage).

Dans celle-ci, le chapitre 4 rapporte la caractérisation statique d'un tour. Le concept de torseur apparaît avec les petits déplacements de translation et de rotation qui conduisent aux définitions de centres de raideur et de rotation.

---

Les aspects de caractérisation dynamique (équilibrage dynamique) des machines-outils sont traités au chapitre 5.

Il est donné un certain nombre de recommandations pour avoir le meilleur contrôle du processus de coupe. La mesure complète du torseur des déplacements de l'outil de coupe est l'objectif du 6<sup>ème</sup> chapitre. Il est établi, qu'en tournage, l'outil a "en moyenne" une trajectoire localisée dans un plan incliné par rapport aux axes de la machine. Une corrélation apparaît entre le centre de raideur et l'ellipse attachée aux déplacements du sommet de l'outil. Cette ellipse est plus ou moins aplatie en fonction du taux des vibrations engendrées par le processus d'usinage. Ainsi, le petit axe de l'ellipse des déplacements est caractéristique du taux des déplacements; c'est un paramètre potentiel de la qualité de surface de la partie usinée. Le chapitre 7 montre la mesure des forces et des moments de coupe. Le concept de moment conduit à de nombreux résultats nouveaux. Le lien est effectué avec le torseur des déplacements. Une étude méticuleuse du torseur des efforts est réalisée. Pour les séries de tests effectuées, l'examen du moment des efforts sur l'axe central montre un lien entre l'évolution de certaines composantes des moments et la direction d'éjection des copeaux par exemple.

La deuxième partie relative à l'étude du perçage est divisée essentiellement en trois étapes distinctes et complémentaires pour modéliser les phénomènes physiques induits par le processus de perçage. La première étape (chapitre 11) consiste à décrire des paramètres géométriques réels en fonction des paramètres de rectification de l'outil. Tout en s'appuyant sur la modélisation de la géométrie, le modèle expérimental de découpe permet d'identifier les actions mécaniques de coupe le long du bord du forêt (chapitre 12). Enfin au chapitre 13, l'aspect phénoménologique du procédé associe les paramètres de coupe à la qualité finale de la surface des trous percés.

---

La dernière partie consacrée à l'étude du perçage est constituée de deux étapes principales. La première (chapitre 18) a pour objectif de déterminer et de vérifier les conditions de coupe les plus influentes sur les forces de coupe et les paramètres géométriques associés. Les divers dispositifs pour la mesure des actions mécaniques débouchent sur un nouveau dynamomètre à six composantes adapté aux exigences requises. La seconde partie (chapitre 19) décrit la démarche utilisée afin de développer un modèle expérimental du torseur d'actions mécaniques. De nouveaux critères énergétiques sont introduits au travers des densités des moments de coupe. Enfin, les résultats sont exposés et fournissent un modèle du moment de coupe avant de conclure.

*Genèse-Remerciements.* Les résultats exquisés ci-dessus reposent essentiellement sur la métrologie des torseurs développée par Yves Couétard<sup>2</sup>. L'ensemble des apports scientifiques que nous relatons sont en grande partie le fruit d'une intense collaboration entre l'Université de Bordeaux (UB) et l'Université Polytechnique de Bucarest (UPB) issue d'un programme pédagogique<sup>3</sup>. Ce programme pédagogique s'est naturellement prolongé en une coopération de recherche entre UB et UPB. L'un des résultats tangibles de cette collaboration est la thèse réalisée en cotutelle par l'un des auteurs (C. B.) appuyée par un travail d'équipe des auteurs et des professeurs Philippe Darnis, Raynald Laheurte et Jean-Yves K'nevez qui ont eux aussi participé à l'encadrement des thèses de Sylvain Laporte et Gaëtan

---

<sup>2</sup> Professeur agrégé de l'Ecole Nationale Supérieure (ENS) de Cachan et docteur de l'Université de Bordeaux

<sup>3</sup> Tempus JEP 11513-96 (1996-99) dirigé par l'un des auteurs (A.G.) pour implanter, à la demande de la Commission Européenne, le système des crédits universitaires européens (European Credit Transfer System) dans les universités roumaines : Polytechnique de Bucarest, Brasov, Cluj-Napoca, Timisoara...

---

Albert. Les auteurs adressent leurs très chaleureux remerciements à toutes ces personnalités pour leur amicale et intense collaboration.

Les auteurs

---

# Environnement mathématique

## 1 ANALYSE VECTORIELLE

Parce que l'accent est mis sur les applications et que l'espace est limité, nous énoncerons la plupart des théorèmes fondamentaux sans preuve. Des références sont données pour approfondir si besoin les connaissances du lecteur (Perez, 1989 ; Brousse, 1973).

### 1.1 Rappel sur les espaces vectoriels

Un espace vectoriel  $E$  (de dimension 3) est constitué d'une suite d'éléments appelés points. Ceux-ci sont ordonnés en couple  $(AB)$  de deux points  $A$  et  $B$  (bi-point), auquel nous faisons correspondre un vecteur  $\mathbf{AB}$  de l'espace vectoriel  $E$ .

#### 1.1.1 Espace vectoriel Euclidien

Un espace vectoriel  $E$  est dit Euclidien s'il est pourvu d'un produit scalaire  $f$  qui a deux vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  de  $E$  fait correspondre le nombre réel  $f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  (noté  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \geq 0$ ). Ce nombre jouit des propriétés bien connues :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= f(\mathbf{v}, \mathbf{u}), \\ f(\mathbf{u}, \lambda \mathbf{v}) &= \lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ f(\mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w}) &= f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned} \tag{1}$$

où  $\lambda$  est un nombre réel quelconque. Remarquons que  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u}^2$  et que  $|\mathbf{u}| = (\mathbf{u}^2)^{1/2}$  est le module de  $\mathbf{u}$ . Le module de  $\mathbf{u}$  est nul si et seulement si  $\mathbf{u}$  est le vecteur nul de  $E$ . Un vecteur unitaire a son module égal à 1. Deux vecteurs sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

#### 1.1.2 Espace affine

Un espace affine  $\underline{E}$  est un ensemble d'éléments appelés point tel que pour toute paire ordonnée  $(AB)$  de deux points  $A$  et  $B$  (bi-point) nous

pouvons faire correspondre un vecteur  $\mathbf{AB}$  de l'espace vectoriel  $\underline{E}$  ; soient trois points A, B, C de  $\underline{E}$  nous avons les propriétés suivantes :

- $\mathbf{AB} = -\mathbf{BA}$
- $\mathbf{AC} = \mathbf{AB} + \mathbf{BC}$
- O étant un point quelconque de  $\underline{E}$ , appelé origine, il existe un point A et un seul de  $\underline{E}$  défini par  $\mathbf{OA} = \mathbf{v}$  pour tout vecteur  $\mathbf{v}$  appartenant à  $\underline{E}$ .

### 1.1.3 Repère de référence dans un espace affine

Dire que  $\underline{E}$  est un espace vectoriel à trois dimensions implique qu'il existe au moins une base. Une base est constituée de trois vecteurs  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  tels que tout vecteur  $\mathbf{u}$  de  $\underline{E}$  soit une combinaison linéaire de  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ . La base  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  ou  $\mathbf{e}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) est orthonormée si et seulement si :

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

où  $\delta$  est le symbole de Kronecker, c'est à dire que  $\delta_{ij} = 1$  si les deux indices sont identiques ( $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$ ) et  $\delta_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ . Ainsi les  $\delta_{ij}$  sont les éléments de la matrice unité. Nous utilisons ici la convention d'Einstein ou convention de sommation sur l'indice répété dite convention de l'indice muet.

Avec cette convention  $X_i \mathbf{e}_i$  et  $X_k \mathbf{e}_k$  représentent le même vecteur  $\mathbf{X}$ . Nous avons également :

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 = X_i Y_i.$$

Dans ce livre nous n'utiliserons que des bases orthonormées. Un repère (ou référentiel) de l'espace physique est noté  $R = (O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  ou plus simplement  $R = (O, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ . Les trois vecteurs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  forment avec le point O (pris pour origine du repère) un repère direct si un observateur placé sur  $\mathbf{OA} = \mathbf{x}$  les pieds placés en O et regardant vers  $\mathbf{OB} = \mathbf{y}$  voit  $\mathbf{OC} = \mathbf{z}$  sur sa gauche. Cette règle est appelée règle du « bonhomme d'Ampère » ou règle du « tire-26bouchon ».

---

#### 1.1.4 Pointeurs

Un pointeur est le couple constitué d'un vecteur  $\mathbf{V}$  de  $\underline{E}$  et d'un point  $A$  de  $\underline{E}$ . Ce couple associé à  $\underline{E}$  est noté  $(A, \mathbf{V})$ . Comme exemple prenons le cas d'une force  $\mathbf{F}$  qui s'exerce en un point  $A$  sur un système matériel. Cette force  $\mathbf{F}$  peut être représentée par le pointeur  $(A, \mathbf{F})$ .

#### 1.1.5 Champ scalaire et champ vectoriel

Un champ scalaire est l'application qui fait correspondre à tout point  $A$  de  $\underline{E}$  un scalaire  $\theta$ . Exemple la température en chaque point de l'espace.

#### 1.1.6 Produit scalaire

Le produit scalaire des deux vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  est simplement noté  $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$  (un point entre  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ ). Si ces vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  forment un angle  $\theta$  alors le produit scalaire s'écrit :

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}| \cdot \cos \theta$$

La quantité  $f(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  est appelée le carré de la norme du vecteur  $\mathbf{X}$ . La racine carrée de  $f(\mathbf{X}, \mathbf{X})$  est appelée longueur du vecteur  $\mathbf{X}$  ; elle est notée  $|\mathbf{X}|$ , elle est désignée par  $|\mathbf{X}| = \sqrt{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ . Un vecteur dont la longueur est l'unité est dit vecteur normalisé ou vecteur unité. Une interprétation physique du produit scalaire est le calcul du travail effectué par une force  $\mathbf{X}$  pendant le déplacement  $\mathbf{Y}$  de son point d'application  $A$ .

#### 1.1.7 Produit vectoriel ou produit en « croix »

En conservant la situation ci-dessus où  $\theta$  est l'angle entre les deux vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ , le produit vectoriel (ou en croix) des vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$  (noté  $\wedge$ ) est désigné par :

---



$$\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = |\mathbf{X}| \cdot |\mathbf{Y}| \cdot \sin \theta \cdot \mathbf{n} \quad (2)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal au plan contenant les vecteurs  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ . La direction positive de  $\mathbf{n}$  est déterminée par la règle du tire-bouchon (ou du bonhomme d'Ampère) en allant du vecteur  $\mathbf{X}$  vers le vecteur  $\mathbf{Y}$  selon l'angle  $\theta$  définissant la direction positive du vecteur  $\mathbf{n}$ . De plus, le vecteur  $\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}$  a la même longueur que le vecteur  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y}$  mais sa direction est inverse.

Ainsi  $\mathbf{X} \wedge \mathbf{Y} = -\mathbf{Y} \wedge \mathbf{X}$ . L'ordre des vecteurs dans le produit vectoriel est donc important.

### 1.1.8 Moment en un point

Par définition le moment en un point  $O$  (noté  $\mathbf{M}_O$ ) du pointeur  $(A, \mathbf{V})$  est le vecteur :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}. \quad (3)$$

Par exemple, si une force  $\mathbf{V}$  s'exerce en un point  $A$  ayant pour vecteur position  $\mathbf{OA}$  d'origine  $O$  alors le moment du vecteur  $\mathbf{V}$  par rapport à  $O$  est défini par l'équation (3). Il est facile de montrer que le moment du même vecteur ( $\mathbf{V}$ ) en un autre point  $O'$  ( $\mathbf{M}_{O'}$ ) est relié au moment en  $O$  ( $\mathbf{M}_O$ ) par la relation :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO}' \wedge \mathbf{V}. \quad (4)$$

Par définition,  $O$  étant un point d'un axe  $\Delta$  de vecteur unitaire  $\mathbf{u}$ , le moment du pointeur  $(A, \mathbf{V})$ , par rapport à l'axe  $\Delta$  est le scalaire :

$$\mathbf{M}_\Delta = \mathbf{u} \cdot \mathbf{M}_O = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{OA} \wedge \mathbf{V}). \quad (5)$$

Ce concept est indépendant du choix du point  $A$  de l'axe  $\Delta$ .

## 2 TORSEUR

### 2.1 Champ antisymétrique

Un champ de vecteurs  $\mathbf{M}_A$  est antisymétrique s'il existe un vecteur  $\mathbf{R}$  tel que, quelque soient deux points  $A$  et  $B$  ceux-ci sont liés par la relation :

---

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{M}_B + (\mathbf{AB} \wedge \mathbf{R}). \quad (6)$$

Le vecteur  $\mathbf{R}$  est le vecteur antisymétrique du champ. Prenant en compte cette définition, nous voyons que  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{M}_A$  ont des caractéristiques polaire et axial différentes.

## 2.2 Définition d'un torseur

Nous appelons torseur réduit en un point  $O$ , noté  $[A]_O$ , tout champ antisymétrique  $\mathbf{M}_O$  et son vecteur  $\mathbf{R}$  ;  $\mathbf{M}_O$  et  $\mathbf{R}$  sont respectivement appelés moment et vecteur (ou résultante générale) du torseur  $[A]_O$  réduit au point  $O$ . Cet élément est généralement noté :

$$[A]_O = \left\{ \begin{array}{l} R \\ M_o \end{array} \right\} \quad (7)$$

## 2.3 Propriétés

Les résultats suivants sont faciles à obtenir et immédiatement vérifiables :

- deux torseurs  $[A_1]_O$  et  $[A_2]_O$  réduit au même point  $O$  sont égaux si leur vecteur antisymétrique et leur vecteur sont égaux ( $\mathbf{M}_{1O} = \mathbf{M}_{2O}$  et  $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_2$ ),
- la somme de deux torseurs réduit au même point est un torseur (réduit au même point) dont les éléments sont respectivement la somme des deux champs antisymétrique et la somme des deux vecteurs (avec des notations évidentes  $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{1O} + \mathbf{M}_{2O}$  et  $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ ),
- multiplier un torseur ( $\mathbf{M}_{1O}, \mathbf{R}_1$ ) par un scalaire ( $\lambda$ ) consiste à multiplier par ce scalaire le champ antisymétrique et le vecteur (avec des notations évidentes)  $\mathbf{M}_O = \lambda\mathbf{M}_{1O}$  et  $\mathbf{R} = \lambda\mathbf{R}_1$ .

## 2.4 Invariants

Les résultats suivants s'établissent facilement.

- Les projections d'un champ antisymétrique réduit en un point A et en un point B sur son vecteur sont égales ( $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_B$ ).
- $\mathbf{AB} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{AB} \cdot \mathbf{M}_B$ , cette propriété invariante est connue sous le nom d'équiprojectivité.
- Le produit scalaire (ou comoment) de deux torseurs réduits au même point est le scalaire  $\mathbf{P} = \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{M}_{2A} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{M}_{1A}$ . Noter que si l'un des torseurs est le torseur des vitesses et l'autre le torseur des efforts alors ce scalaire  $\mathbf{P}$  est la puissance mécanique.

## 2.5 Torseurs associés à une suite de pointeurs

Considérons une suite de pointeurs  $(A_i, \mathbf{V}_i)$ . En un point arbitraire O le moment résultant  $\mathbf{M}_O$  et en introduisant un autre point O' nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O &= \sum_i \mathbf{OA}_i \wedge \mathbf{V}_i = \sum_i (\mathbf{OO}' + \mathbf{O}'\mathbf{A}_i) \wedge \mathbf{V}_i, \\ \mathbf{M}_O &= \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO}' \sum_i \mathbf{V}_i. \end{aligned} \quad (8)$$

Si nous posons  $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{V}_i$  il vient :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO}' \wedge \mathbf{R}. \quad (9)$$

Donc à une suite de pointeurs peut être associé un torseur de vecteur  $\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{V}_i$  et de moment au point O,  $\mathbf{M}_O = \sum_i \mathbf{OA}_i \wedge \mathbf{V}_i$ .

## 2.6 Axe central

Par définition, l'axe central d'un torseur est le lieu des points A où le moment ( $\mathbf{M}_O$ ) le vecteur  $\mathbf{R}$  sont colinéaires c'est à dire :

$$\mathbf{OA} = \frac{\mathbf{R} \wedge \mathbf{M}_O}{\|\mathbf{R}\|} + \lambda \mathbf{R} \quad (10)$$

où O est le point où est réduit le torseur et A le point courant décrivant l'axe central. Ainsi  $\mathbf{OA}$  est le vecteur associé au bi-point [O, A] (figure 1).

Cette droite (figure 1a) correspond aux points géométriques où le moment des actions du torseur mécanique est minimum. Le calcul de l'axe central consiste à déterminer l'ensemble des points (une ligne droite) où le torseur peut être représenté par la ligne en gras (moment pur) par la propriété (10). Cette ligne ne peut pas passer par le point O (Brousse, 1973).

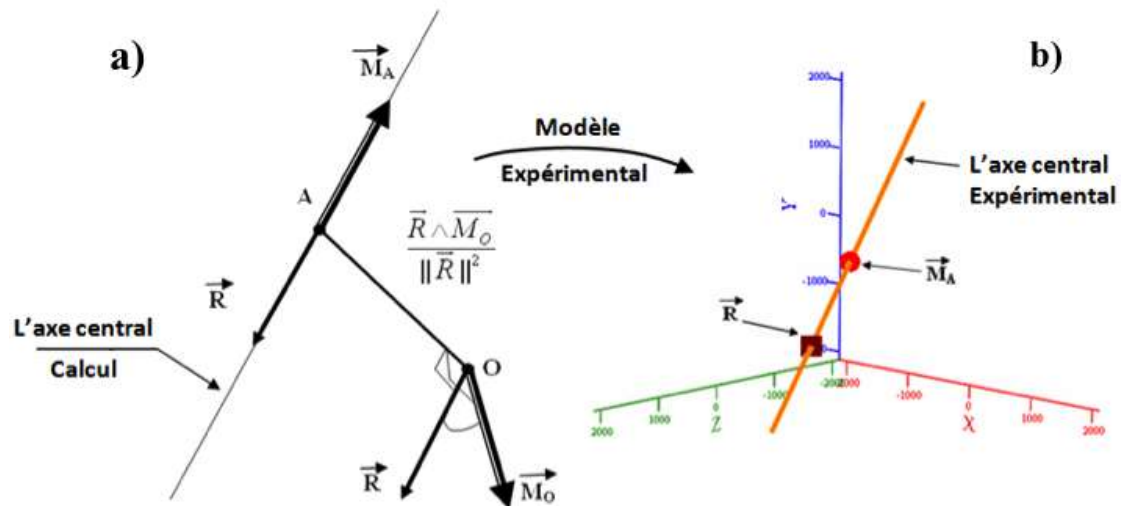


Figure 1 Représentation de l'axe central (a). Représentation de la colinéarité entre le vecteur somme  $\mathbf{R}$  et le moment minimum  $\mathbf{M}$  en A ( $\mathbf{M}_A$ ) sur l'axe central (b).

La distribution des moments résultants dans l'espace admet l'axe central comme axe de révolution. Il est facile de montrer qu'il est toujours possible de réduire un torseur à deux vecteurs dont l'un est localisé dans un plan P tandis que l'autre est perpendiculaire à ce plan P.

## Partie 1 TOURNAGE

### 3 NOMENCLATURE

- A            Point de l'axe central  
 $[A]_o$         Torseur des efforts exercés au point O sommet de l'outil

$a$	Distance des déplacements entre transducteurs
$a_p$	Profondeur de passe (mm)
$a_u (b_u)$	Grand (petit) axe de l'ellipse des déplacements au sommet de l'outil (m)
$a_f (b_f)$	Grand (petit) axe de l'ellipse au point d'application des forces (m)
<b>BO</b>	Bloc Outil
<b>BP</b>	Bloc Pièce
[C]	Matrice d'amortissement (M.s.m <sup>-1</sup> )
[C <sub>o</sub> ]	Matrice des souplesses (m.N <sup>-1</sup> )
$C_i$	Déplacement des transducteurs (i =1 à 6)
<b>CR<sub>BT</sub></b>	Centre des raideurs du bloc outil
D	Diamètre de la pièce (m)
$D_1$	Diamètre de fixation (mm)
$D_2$	Diamètre du porte-pièce (mm)
{ $D_{ij}$ }	Ligne droite correspondant à la direction des déplacements du point $P_{ij}$ (i = x, y, z) et (j = 1, 2, 3)
( $D_i$ )	Vecteur déplacement (composante de rang i)
{D}	Torseur des petits déplacements
$d_{ij}$	Vecteur des déplacements $P_{ij}$ (i = x, y, z) et (j=1, 2, 3)
$d_x$	Distance entre les lignes $D_{ij}$
E	Module d'Young (N.mm <sup>-2</sup> )
$e_x, f_x$	Facteurs d'échelle
$F_i$	Vecteurs des forces appliquées pour obtenir le centre de rigidité du <b>BO</b> (i = x, y, z)
I	Moment d'inertie
J	Point d'intersection
$f$	Avance (m.tr <sup>-1</sup> )

---

---

$f_{cop}$	Fréquence copeau (Hz)
$f_z$	Effort de talonnage selon z (N)
$f_{max}$	Composante de fréquence la plus élevée dans le signal mesuré (Hz)
$f_{sampling}$	Fréquence d'échantillonnage (Hz)
$K$	Constante de proportionnalité intrinsèque au matériau
$[K]$	Matrice de raideur ( $N.m^{-1}$ )
$[K_C]$	Matrice de rigidité des rotations ( $N.m.rd^{-1}$ )
$[K_F]$	Matrice de rigidité des déplacements ( $N.m^{-1}$ )
$N$	Nombre de tours ( $tr.mn^{-1}$ )
$\mathbf{n}_f$	Vecteur attaché à la rigidité des composants du système
$\mathbf{n}_u$	Direction normale au plan $P_u$
$\mathbf{n}_{ui}$	Vecteur unitaire, support de l'axe de l'ellipse $i$ ( $i = a, b$ ) situé dans le plan $P_u$
$P_u$	Plan attaché aux déplacements de l'arête de l'outil de coupe
$r_\varepsilon$	Rayon de bec (m)
$R$	Rayon d'acuité (m)
$R_t$	Rugosité totale ( $\square$ )
$[K_{F,BT}]$	Matrice de rigidité des déplacements du <b>BO</b> ( $N.m^{-1}$ )
$[K_{F,BW}]$	Matrice de rigidité des déplacements du <b>BP</b> ( $N.m^{-1}$ )
$[K_{F,WAM}]$	Matrice de rigidité du déplacement du système d'usinage ( $N.m^{-1}$ )
$[K_{errors(\%)}]$	Matrice des erreurs pour la matrice $[K]$
$[K_{CF}]$	Matrice de rigidité rotation/déplacement ( $Nm.m^{-1}$ )
$[K_{FC}]$	Matrice de rigidité déplacement/rotation ( $N.rd^{-1}$ )
$L_1$	Longueur de fixation (mm)
$L_2$	Longueur de la pièce (mm)
$L_C$	Longueur de contact de l'arête de coupe (partie rectiligne) (m)

---

---

$L_{CT}$	Longueur de contact totale de l'arête de coupe (m)
$M_i$	Point d'intersection entre les lignes droites ( $D_{ij}$ ) ( $i = x, y, z$ ) et ( $j = 1, 2, 3$ )
$m$	Déplacement mesuré au point de charge
$[M]$	Matrice de masse
$n_i$	Normal au plan $P_i$
$O$	Point du sommet de l'outil
$O_c$	Centre du cube
$P$	Force (N)
$P_i$	Plan incluant le point $M_i$
$P_{BT}$	Plan des déplacements de l'outil
$d_i$	Ligne directrice de projection des moments sur l'axe central ( $i = 1, 2$ )
$e_i$	Ellipse des points d'application des forces ( $i = 1$ à $5$ )
$F_v$ ( $F_n$ )	Force de coupe variable (nominale) (N)
$F_x$	Effort dans la direction radiale (N)
$F_y$	Effort le long de l'axe de coupe (N)
$F_z$	Effort le long de l'axe d'avance (N)
$h_{max}$	Epaisseur maximum des copeaux (mm)
$h_{min}$	Epaisseur minimale des copeaux (mm)
$\ell$	Epaisseur du copeau
$\ell_o$	Longueur d'une ondulation des copeaux (mm)
$\{m\}$	Torseur des déplacements mesurés (m)
$[M]$	Matrice de masse ( $N.m^{-1}.s^{-2}$ )
$M_A$	Moment minimum des forces de coupe en A qui agit sur l'outil (dN.m)

---

---

$M_o$	Moment minimum des forces de coupe en O qui agit sur l'outil (dN.m)
$N$	Vitesse de rotation de la broche (tr.mn <sup>-1</sup> )
$n_{fa}$ ( $n_{fb}$ )	Direction de la projection normale de $P_f$ sur $a_f$ ( $b_f$ )
$O'$	Centre du transducteur du dynamomètre
$OA_s$	Axe central du torseur des petits déplacements
$P_f$	Plan attaché aux points d'application des forces
$P_{ij}$	Point de chargement ( $i = x, y, z$ ) et ( $j=1, 2, 3$ )
$T$	Période (s)
$\{T\}$	Torseur des actions mécaniques
$u$	Déplacement de la pointe de l'outil (m)
$\alpha$	Angle de dépouille (°)
$\alpha_{\square(xy)}$	Angle de la direction principale de la raideur en statique dans le plan (x, y) (°)
$\alpha_{\square(yz)}$	Angle de la direction principale de la raideur en statique dans le plan (y,z) (°)
$\Delta t$	Déphasage temporel entre deux signaux (s)
$\varphi_u$	Déphasage entre les composantes des déplacements pris au niveau du bord de l'outil (°)
$\gamma$	Angle de coupe (°)
$\lambda$	Angle de frottement moyen (rd)
$\lambda_s$	Angle d'inclinaison d'arête (°)
$\kappa_r$	Angle de direction de l'arête de coupe (°)
$\theta_{e(xy)}$	Angle de la direction des déplacements principaux du bord de l'outil dans le plan (x, y)
$[V]$	Matrice des vecteurs propres $[K_{F,BO}]$
$[v_1]$	Matrice des valeurs propres $[K_{F,BO}]$

---



$\mathbf{R}$	Vecteurs somme des forces de coupe qui agissent sur l'outil (N)
$V$	Vitesse de coupe (m/mn)
$w_{\max}$	Largeur maximale de copeau (mm)
$w_{\min}$	Largeur minimale de copeau (mm)
$W_{TM}$	Pièce machine-outil
$\mathbf{x}$ ( $\mathbf{z}$ )	Direction de dépouille (taillant)
$\mathbf{y}$	Direction de coupe
$\Phi$	Angle de cisaillement primaire ( $^{\circ}$ )
$\varphi_c$	Angle d'inclinaison de la largeur du copeau ( $^{\circ}$ )
$\varphi_{fui}$	Déphasage entre les composantes des déplacements et des forces à la pointe de l'outil $i = x, y, z$ ( $^{\circ}$ )
$\xi$	Taux d'écrouissage
$\xi_c$	Coefficient d'écrouissage
$\xi_d$	Taux d'écrouissage dynamique
$\xi_i$	Pourcentage d'amortissement
$\delta$	Déplacement (mm)
$\{\delta_x\}$	Déplacement généralisé des éléments (m)
$\{\Delta_\lambda\}$	Déplacement généralisé de la structure (m)
$\varepsilon_i$	Déplacement le long de l'axe $i$ ( $i=1, 2, 3$ )
$\theta$	Angle mesuré au point d'application de la force
$\theta_{OA}$	Angle entre l'axe de raideur et la normale au plan de l'axe central ( $^{\circ}$ )
$\theta_e$	Angle de l'ellipse des déplacements ( $^{\circ}$ )
$\theta_i$	Déviations angulaires de "coplanarité" entre les lignes $D_{ij}$ ( $i = x, y, z$ et $j = 1, 2, 3$ )
$\mu$	Coefficient de frottement

---

$\mu_r$	Coefficient de régénération
$\mu_i$	Distance minimale entre les lignes droites $D_{ij}$ ( $i = x, y, z$ et $j=1, 2, 3$ )
$\omega_d$	Fréquence naturelle amortie
$\xi_i$	Pourcentage d'amortissement
$\rho_i$	Petite rotation le long de $i$ ( $i = x, y, z$ )
$\sigma_0$	Contrainte d'écoulement plastique (Pa)
$\sigma_{\square}(\square)$	Pente de la surface ondulée ( $^{\circ}$ )
$\omega$	Vitesse angulaire ( $\text{rd.s}^{-1}$ )
$\tau$	Contrainte de cisaillement (MPa)

## 4 UN EXEMPLE D'EQUILIBRAGE STATIQUE ET METROLOGIE

### 4.1 Introduction

De nos jours, les machines-outils sont très rigides. Elles ont de moins en moins de défauts de géométrie. Les problèmes vibratoires sont particulièrement liés à la coupe de la matière. Les conditions de coupe sont généralement choisies de manière à enlever la matière de façon stable. Cependant, quelque fois le « broutement » est inévitable du fait des vibrations induites par la géométrie de l'outil coupant et de la pièce. Dans (Perez et al., 2007) la plus grande partie du mouvement pendant le broutement vient de la pièce car elle a une rigidité statique qui est de l'ordre de 3,2 fois inférieure à celle de l'outil.

Comme il est très peu pratique d'instrumenter la pièce pendant la coupe, l'objectif final est de développer un moyen d'observation capable de transformer les mesures effectuées au niveau de l'outil de coupe en une prédiction du mouvement de la pièce. Dassanayake et al., 2008 abordent

---

dans le cas à une dimension la réponse dynamique du porte-outil lorsque l'outil suit une surface générée. Ils considèrent uniquement les mouvements de l'outil et ne tiennent pas compte de la vibration de la pièce. Insperger continue dans le cas bi-dimensionnel en maintenant la pièce rigide, mais il prend en compte la flexibilité de l'outil (Insperger et al., 2008).

Pour une opération de fraisage (Salgado et al., 2005), les déformations de la machine-outil, du porte-outil et de l'outil serré dans la broche, du serrage de l'outil dans le porte-outil et de l'outil lui-même ont été mesurées expérimentalement sous les effets de forces connues. Les résultats de cette étude montrent que, pour la flèche de l'outil soumise à une force de coupe donnée, la rigidité de la machine et le serrage dans le système machine-broche, porte-outil et outil ont une importance similaire dans le déplacement de la pointe de l'outil. Il est donc nécessaire d'identifier le comportement élastique des pièces de la machine (Cano et al., 2008). Ces vibrations sont générées et induites par le processus de coupe. Un tour conventionnel à haute rigidité (Ernault HN400-France) est utilisé pour étudier ces phénomènes dynamiques (Bisu, 2007). Le système **POM** (pièce-outil-machine) est présenté à la figure 2 pour une opération de tournage.

La structure élastique du système **POM** présente plusieurs degrés de liberté et comporte de nombreux modes de vibrations spécifiques. Les vibrations de chaque élément de la structure sont caractérisées par leur fréquence propre dépendant de la matrice de raideur  $[K]$ , de la matrice de masse  $[M]$  et de la matrice d'amortissement  $[C]$ . Dans un premier temps, seule la matrice de rigidité  $[K]$  est étudiée. La matrice  $[C]$  est étudiée plus en détail dans le cas dynamique (section 5.3.3).

---

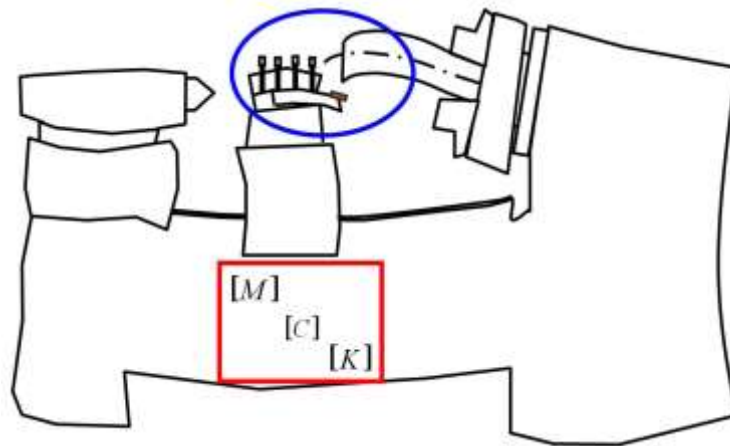


Figure 2 Pièce-outil-machine en régime de coupe dynamique.

Notre approche expérimentale est basée sur le développement de la matrice présentée dans (Pestel et al., 1963). Pour identifier le comportement statique du système **POM**, le système d'usinage est divisé en deux blocs, Bloc Outils (**BO**) et la pièce à usiner (**BP**), figure 3. Ces deux blocs sont liés au support (bâti) supposé être infiniment rigide.

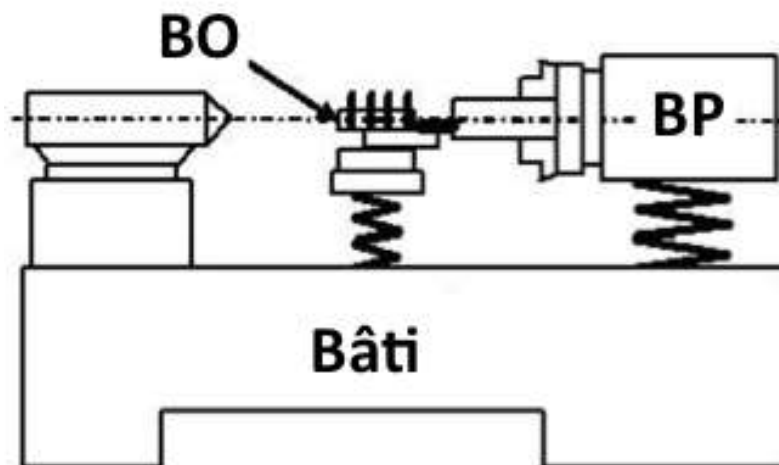


Figure 3 Présentation du dispositif expérimental.

## 4.2 Composants du système POM

### 4.2.1 Bloc pièce : BP

Comme de nombreux chercheurs (Benardos et al., 2006; Mehdi et al., 2002a; Yaldiz et al., 2006), nous choisissons une géométrie cylindrique de

la pièce. Le **BP** représente la partie tournante du système **POM**; il comprend le support de fixation, la pièce et la broche (figure 4 a,b). Pour rendre l'ensemble du dispositif rigide, une unité très rigide (pièce, support de fixation) devant les éléments **POM** est conçue (figure 5).

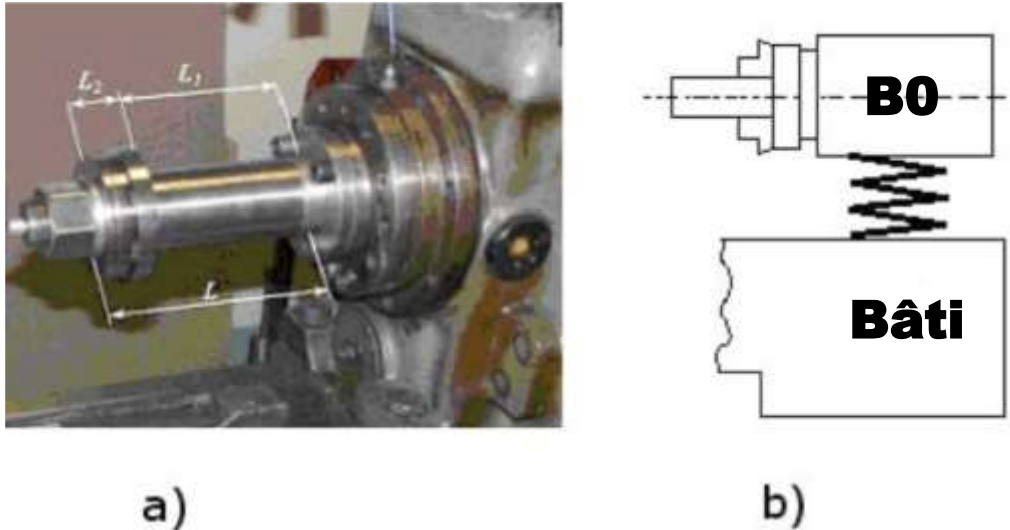


Figure 4 Représentation de la partie **BP**.

La géométrie de la pièce et son support sont choisis avec  $D_1 = 60$  mm,  $D_2 = 120$  mm et  $L_2 = 30$  mm (figure 5). Les dimensions de ces éprouvettes ont été sélectionnées à l'aide d'une analyse par éléments finis couplée à une optimisation, avec le logiciel SAMCEF<sup>®</sup>, afin de conférer à l'unité une rigidité maximale. Il est nécessaire de déterminer la longueur  $L_1$  du dispositif de maintien pour obtenir une rigidité significative en flexion. L'objectif est d'éloigner le premier mode de vibration **BP** du mode de vibration propre fondamentale du tour utilisé (Bisu, 2007).

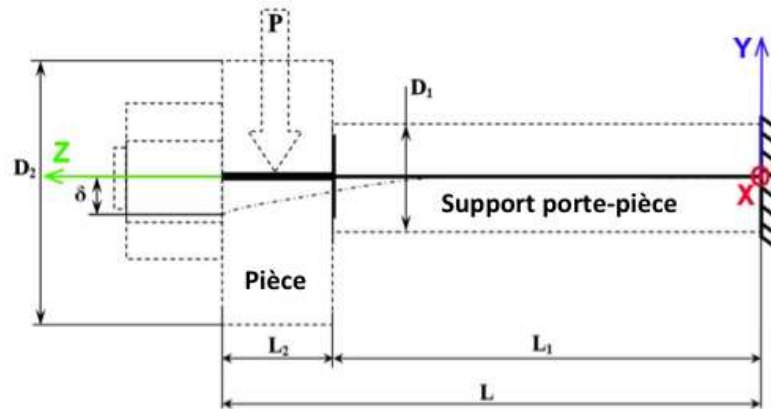


Figure 5 Optimisation du support porte-pièce/pièce.

Comme (Salgado et al., 2005) et d'autres, la rigidité est calculée sur la base du déplacement  $\delta$  pour une force donnée  $P$  :

$$\delta = \frac{P \times L^3}{3E \times I} \quad (11)$$

avec pour moment d'inertie :

$$I = \frac{\pi \times D_1^4}{64}. \quad (12)$$

La figure 6 représente les valeurs des déplacements et la rigidité relative de la longueur du support/pièce, pour une charge  $P = 1.000 \text{ N}$ , pour un matériau de module d'Young  $E = 21.105 \text{ MPa}$  et d'un diamètre de support  $D_1 = 60 \text{ mm}$ .

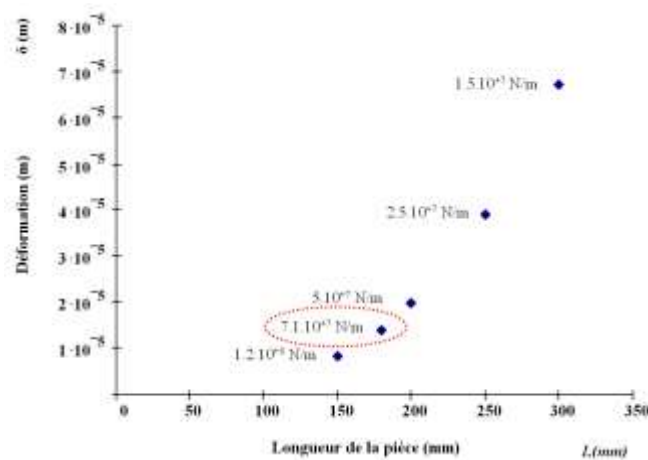


Figure 6 Détermination des déformations pour différentes longueurs de support porte-pièce.

Il est rappelé le choix d'une longueur de fixation :  $L_1 = 180$  mm, pour une rigidité en flexion de  $7.10^7$   $\text{Nm}^{-1}$ . Cette valeur est comprise dans la partie supérieure de l'intervalle des valeurs de rigidité acceptables pour un tour conventionnel (figure 7) (Ispas et al., 1999; Koenigs et al., 1971; König et al., 1997).

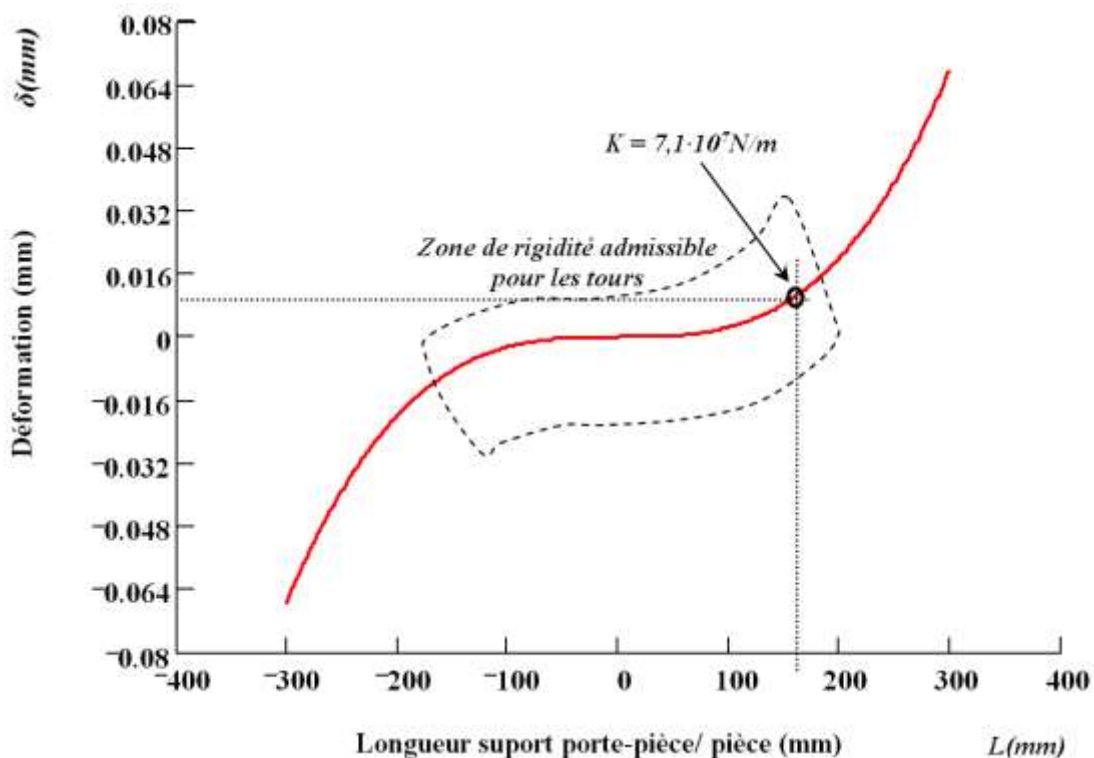


Figure 7 Zone d'optimisation de la déformation de la pièce.

#### 4.2.2 Bloc outil : BO

La partie bloc outil **BO** comprend l'outil, le porte-outil, le dynamomètre, la plaque de fixation sur le chariot transversal (figure 8). Le dynamomètre à six composantes nécessaire pour la mesure des actions mécaniques de coupe (Couétard, 2000) est fixé entre le chariot et le porte-outil. Pour caractériser le **BO** nous déterminons les masses, les amortissements et les raideurs équivalentes. La rigidité du **BO** est évaluée dans la sous-section suivante.

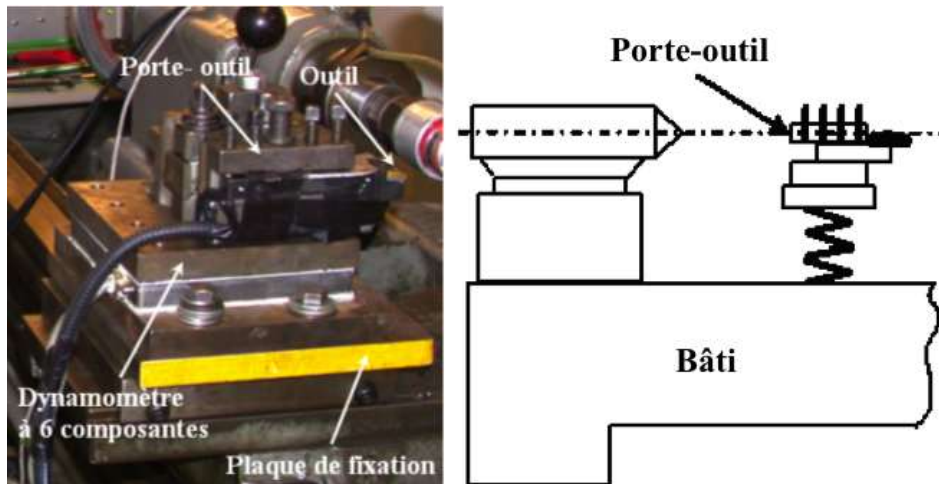


Figure 8 Représentation du bloc outil **BO**.

### 4.3 Caractérisation statique du système usinant

L'étude statique vise à caractériser les valeurs des rigidités statiques équivalentes afin d'identifier le comportement élastique tri-dimensionnel du système d'usinage. Le système usinant est soumis à trois types d'analyses expérimentales. La première est une analyse statique. Elle est suivie d'une analyse dynamique fréquentielle à l'impact. La troisième analyse le fonctionnement dynamique de la machine à vide, pour déterminer les spectres des fréquences du système en dehors du processus de coupe. Les essais statiques consistent à charger et à mesurer les déplacements des différents blocs (**BO**, **BP**) suivant les trois directions. Nous évaluons dès lors les raideurs tri-dimensionnelles du système usinant (raideurs des **BO** et **BP**). Les efforts appliqués sont qualifiés à l'aide d'un capteur de force agissant suivant les trois directions **x**, **y**, **z** (respectivement, axe radial, axe de coupe, axe d'avance). Le torseur des petits déplacements est mesuré par six capteurs de micro-déplacement uni-directionnel (Couétard, 1993).

#### 4.3.1 Matrice globale des raideurs

Généralement, les tests statiques consistent à charger par des efforts connus les deux blocs **BO** et **BP** puis à ne mesurer que les composantes des



déplacements associées (Gorodetskii et al., 2008; Yaldiz et al., 2006b). Ici, les tests statiques consistent à charger par des efforts connus les deux blocs et à mesurer les torseurs des petits déplacements (c'est-à-dire trois déplacements linéaires et trois rotations). L'approche expérimentale est basée sur le développement de la matrice présentée dans (Robinson, 1971).

La déformation d'un élément de structure est représentée par les déplacements des noeuds qui déterminent cet élément. Les "forces associées" correspondent à des déplacements qui agissent à ces noeuds. Aux déplacements qui agissent en ces noeuds dans l'élément, correspondent des "forces associées". La matrice de transformation qui relie les déplacements généralisés d'un élément aux "forces associées" sur l'élément est la matrice de rigidité ou matrice de raideur de l'élément. De même la matrice qui relie les déplacements généralisés de la structure d'un élément de forces discrètes généralisées appliquées est la matrice de raideur de la structure dite simplement "matrice de raideur"  $[K]$ . La relation entre forces et déplacements est donnée par (Pestel et al., 1963):

$$\{T\} = [K]x\{D\}, \quad (13)$$

où  $\{T\}$  représente le torseur des actions mécaniques,  $[K]$  la matrice de raideur et  $\{D\}$  le torseur des petits déplacements, le tout écrit en un même point.

La forme générale de la matrice carrée de rigidité ( $6 \times 6$ )  $[K]$  est :

$$[K]_{A,xyz} = \begin{bmatrix} K_{FC} & K_F \\ K_C & K_{CF} \end{bmatrix}_{A,xyz}, \quad (14)$$

où  $[K_F]$ ,  $[K_C]$ ,  $[K_{CF}]$  et  $[K_{FC}]$  sont respectivement les matrices carrées ( $3 \times 3$ ) des déplacements, rotations et rotations/déplacements et déplacements/rotations exprimées au point A dans les axes  $x$ ,  $y$ ,  $z$  de la machine.

---

#### 4.3.2 Détermination expérimentale de la matrice des raideurs

*Méthodologie.* Les éléments de la matrice du torseur des petits déplacements sont identifiés grâce au dispositif expérimental présenté à la figure 9. Le système considéré est un cube. Les déplacements sont mesurés par six capteurs de déplacements uni-directionnels avec deux capteurs positionnés symétriquement sur chaque direction. La force appliquée dans chaque direction  $x, y, z$  en trois points différents, est mesurée par un capteur de force. Les coordonnées de chaque point de chargement sont connues par rapport au centre  $O_c$  du cube. Ceci permet pour chaque force appliquée de déterminer le moment et donc le torseur complet des actions mécanique  $\{T\}$  décrit par :

$$\{T\} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_{xO} \\ M_{yO} \\ M_{zO} \end{bmatrix} O.$$

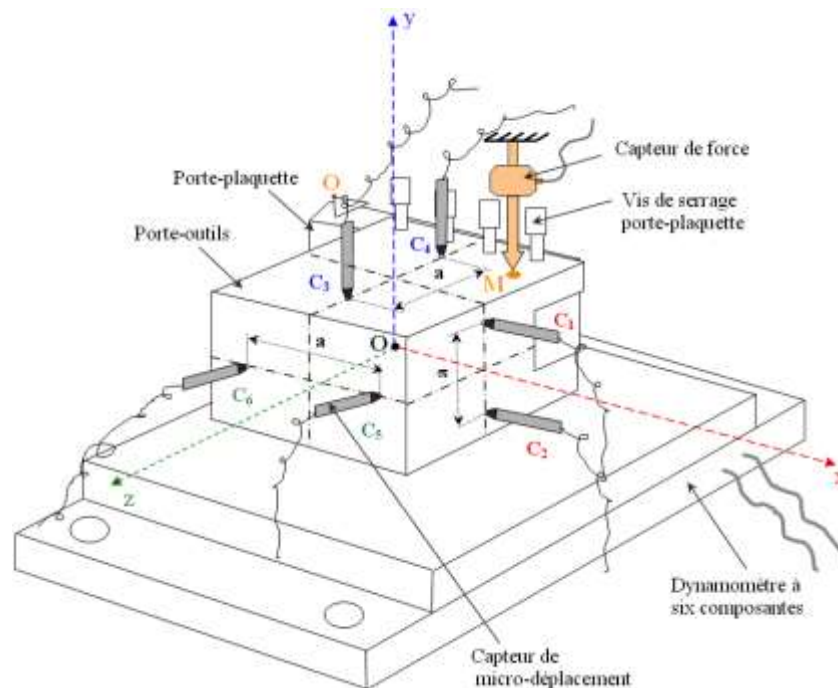


Figure 9 Protocole expérimental pour la caractérisation statique du **BO**.

Par hypothèse, nous considérons que les déplacements induits sont des déplacements de corps rigide et les rotations sont faibles (inférieures à  $10^{-5}$  rd) mais existent. L'existence de ces rotations est importante et en accord avec le couple via la théorie des travaux virtuels. L'ensemble des déplacements peut être représenté par des torseurs des petits déplacements qui sont liés aux torseurs de chargement à l'aide de la matrice des complaisances. Le principe de mesure est présenté figure 10 et permet de déterminer les composantes du torseur des petits déplacements  $\{D\}$  composé des trois rotations  $\rho_x, \rho_y, \rho_z$  et des trois déplacements linéaires  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ .

D'après le schéma de la figure 10, les déplacements linéaires et les rotations sont déterminés, selon chaque direction par :

$$m = \frac{m_1 + m_2}{2}, \tan(\theta) \cong \theta = \frac{m_2 - m_1}{a}. \quad (15)$$

De ces relations et compte tenu des six points de mesure, il en résulte :

$$\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_z \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{-1}{a} & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ m_4 \\ m_5 \\ m_6 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

La force de poussée, imposée et contrôlée, est mesurée à l'aide d'un capteur d'effort uni-directionnel. Le torseur complet et le torseur des petits déplacements sont enregistrés par une chaîne de mesure implémentée sous le logiciel LabVIEW<sup>®</sup>. Ce chargement est effectué par paliers de 20-30 daN jusqu'à chargement complet ou à partir du niveau de 200 daN (déchargement), et ce, de la même manière pour chaque essai suivant les

directions déterminées. L'étalonnage de la platine est effectué à chaque essai. Pour vérifier la répétabilité et l'exactitude des identifications, tous les essais et mesures sont effectués cinq fois et la moyenne est requise pour chaque point de la figure 11.

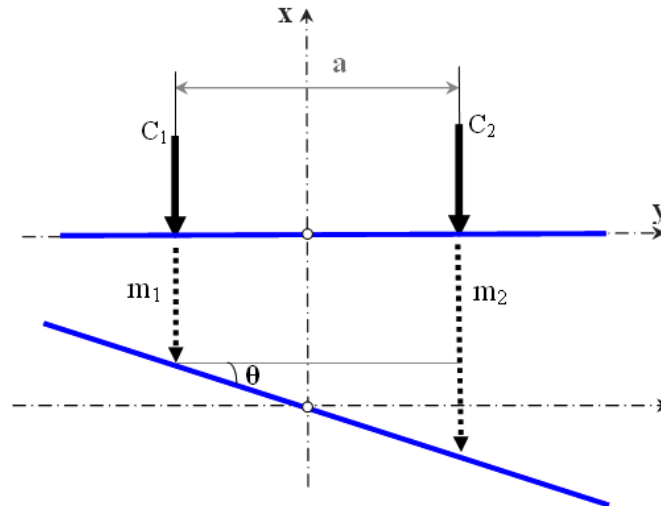


Figure 10 Position des capteurs des déplacements.

Les essais sont effectués pour chaque direction de mesure  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Les déplacements et les rotations sont mesurés lorsque la force est appliquée.

Pour exploiter au mieux les mesures, les courbes des déplacements sont tracées en fonction de la force appliquée en un point particulier correspondant à chaque direction de chargement. Une droite des moindres carrés est ajustée pour déterminer les valeurs des composantes des déplacements pour une force donnée. Pour les six cas de chargement nous déterminons six torseurs des petits déplacements "lissés". Le comportement linéaire observé lors du chargement est différent du comportement linéaire observé lors du déchargement. Cette différence de linéarité entre la charge et la décharge est due à l'existence de forces de frottement aux surfaces de chacun des assemblages.

Lorsque cette différence de comportement linéaire apparaît (hystérésis), nous utilisons la ligne (figure 11) qui passe par le milieu (point

C) du segment AB (charge-décharge). Par hypothèse OC est la ligne dont la pente correspond à la raideur "réelle". Le segment AB représente le double de l'effort de frottement pour la déformation  $\delta$ , (Kudinov, 1970).

Par ailleurs pour le dynamomètre nous avons évalué les incertitudes de mesures à  $\pm 5$  N pour les forces et à  $\pm 2\mu\text{m}$  pour les déplacements.

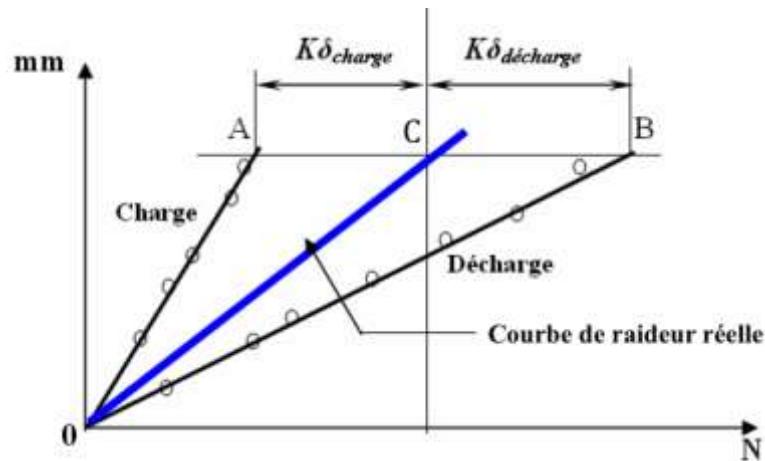


Figure 11 Représentation schématique du comportement linéaire en charge et en décharge.

A ce stade, la matrice colonne des torseurs des petits déplacements et celle des torseurs des actions mécaniques sont connues. La matrice de flexibilité expérimentale  $[C_0]$  du système est déduite de :

$$[C_0] = \{T\}^{-1} \times \{D\}. \quad (17)$$

L'inversion de la matrice de flexibilité expérimentale donne la matrice de rigidité globale,  $[K]$ .

*Matrice de rigidité du BO.* La figure 12 présente un exemple de chargement dans la direction  $x$  du **BO** (Bisu, 2007). Une expérimentation de chargement similaire est effectuée dans les directions  $y$  et  $z$  du **BO**. Pour chaque direction  $x$ ,  $y$  ou  $z$ , les mesures sont prises en trois points et sont enregistrées sur une carte d'acquisition de données installée sur un PC.

Les données stockées peuvent être récupérées et utilisées pour une analyse si nécessaire. En utilisant le logiciel LabVIEW<sup>®</sup>, nous obtenons la

matrice de flexibilité expérimentale  $[C_0]$ . Une simple inversion donne la matrice des raideurs  $[K_{BO}]$ .

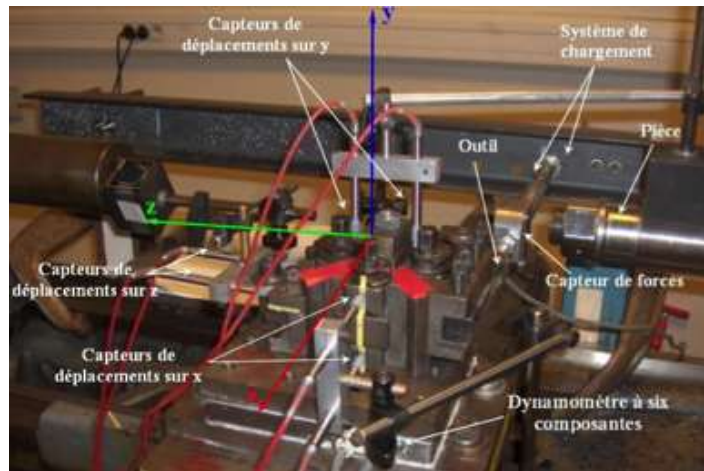


Figure 12 Exemple de chargement dans la direction  $x$  du  $BO$ .

$$[K_{BO}] =$$

$$\begin{matrix}
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e} \\
 \hat{e}
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 -5 \cdot 10^6 & -7,7 \cdot 10^6 & 2,9 \cdot 10^6 & 6,7 \cdot 10^6 & 8,7 \cdot 10^5 & -3,4 \cdot 10^6 \\
 5 \cdot 10^6 & 7,8 \cdot 10^6 & -3 \cdot 10^6 & -7,5 \cdot 10^6 & -3,3 \cdot 10^5 & 1,7 \cdot 10^6 \\
 2,7 \cdot 10^6 & 4 \cdot 10^6 & 5,8 \cdot 10^6 & -1,4 \cdot 10^6 & -1,7 \cdot 10^6 & 1,3 \cdot 10^7 \\
 -1,8 \cdot 10^6 & -2,8 \cdot 10^6 & -7 \cdot 10^6 & 1,5 \cdot 10^6 & -1,6 \cdot 10^6 & -1,2 \cdot 10^7 \\
 1,7 \cdot 10^6 & 2 \cdot 10^6 & 4,6 \cdot 10^6 & 1,5 \cdot 10^6 & -4,7 \cdot 10^5 & 5,8 \cdot 10^6 \\
 1 \cdot 10^6 & 1,4 \cdot 10^6 & -7,4 \cdot 10^6 & -1,9 \cdot 10^6 & -2 \cdot 10^5 & 1,7 \cdot 10^6
 \end{matrix}
 \begin{matrix}
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u} \\
 \hat{u}_{O,xyz}
 \end{matrix} \cdot (18)$$

De plus, sur la figure 11, nous avons fait une hypothèse simplificatrice en conservant pour chaque niveau donné de déformation (par exemple AB), la charge moyenne C correspondant entre la valeur de la charge en (A) et la valeur de la charge en (B). Par conséquent, il est conseillé de s'assurer de la validité de cette hypothèse. Cela doit être fait en estimant, à chaque niveau de charge, l'erreur commise en utilisant la valeur médiane entre la charge et la décharge. Cependant, l'utilisation de la méthode des moindres carrés permet d'évaluer l'erreur commise pour chaque niveau de chargement, c'est-à-dire pour chaque élément de la matrice  $[K_{BO}]$ . Ainsi, une matrice d'erreur

peut être construite. Cette matrice d'erreurs en % notée  $[K_{\text{errors}}]$  permet ainsi de connaître l'erreur attachée à chaque élément de la matrice  $[K_{\text{BO}}]$ . Cette opération est réalisée avec la relation donnée en (19).

$$[K_{\text{errors}}] = \begin{matrix} \hat{e} & 0,1 & 0,7 & 3,8 & 2,3 & 5,7 & 1,7 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0,6 & 1,4 & 1,2 & 2,5 & 3,3 & 2,5 & \hat{u} \\ \hat{e} & 4,3 & 1,2 & 0,05 & 4,4 & 0,1 & 4,7 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0,4 & 0,1 & 0,1 & 0,7 & 1 & 2,2 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0,1 & 0,1 & 0,05 & 0,4 & 0,1 & 0,3 & \hat{u} \\ \hat{e} & 0,1 & 0,2 & 0,3 & 1,3 & 1,2 & 3,1 & \hat{u} \end{matrix} \cdot \quad (19)$$

Il est à noter que l'erreur ne dépasse pas 6% ce qui est largement acceptable. De plus, pour un système "parfaitement" découplé  $[K]$  est diagonal et les termes sont des raideurs donc des grandeurs physiques exprimées en  $\text{N.m}^{-1}$ . La matrice  $[K]$  obtenue est une matrice bloc. En comparant cette matrice à la matrice  $[K]_{\text{A,xyz}}$  de l'équation (14) nous établissons les correspondances suivantes entre les éléments :

- les éléments de la matrice 3x3 dans le coin supérieur droit sont les éléments qui correspondent aux valeurs de raideurs linéaires ( $\text{N.m}^{-1}$ ) notées  $[K_{\text{F}}]$  dans l'équation (14),
- les éléments de la matrice 3x3 du coin inférieur gauche sont les éléments qui correspondent aux valeurs des raideurs angulaires ( $\text{N.m.rd}^{-1}$ ) notées  $[K_{\text{C}}]$  dans l'équation (14),
- les éléments de la matrice 3x3 dans le coin supérieur gauche sont les éléments qui correspondent aux valeurs des couplages "déplacements/rotations" ( $\text{N. rd}^{-1}$ ) notées  $[K_{\text{FC}}]$  dans l'équation (14),
- les éléments de la matrice 3x3 du coin inférieur droit sont les valeurs des couplages "rotations/déplacements" notées  $[K_{\text{CF}}]$  dans l'équation

(14). Ces deux derniers éléments (“déplacements/rotations”  $[K_{FC}]$  et “rotations/déplacements”  $[K_{CF}]$ ) ne sont pas pris en compte ici.

Nous concentrons nos efforts sur les deux premières raideurs, raideur linéaire et raideur angulaire. Seulement la partie des raideurs linéaires (notée  $[K_{F,BO}]$  ci-dessous) est nécessaire au calage du modèle dynamique.

$$[K_{F,BO}] = \begin{matrix} \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & 6,7 \cdot 10^6 & 8,7 \cdot 10^5 & -3,4 \cdot 10^6 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & -7,5 \cdot 10^6 & -3,3 \cdot 10^5 & 1,7 \cdot 10^6 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \\ \hat{e} & -1,4 \cdot 10^6 & -1,7 \cdot 10^6 & 1,3 \cdot 10^7 \\ \hat{e} & & & \hat{u} \end{matrix} \cdot \quad (20)$$

*Matrice des raideurs du BP.* Comme la géométrie **BP** est plus simple, nous nous limitons à mesurer les valeurs des rigidités des déplacements en utilisant trois capteurs des déplacements suivant les trois directions principales. Le chargement a été effectué avec le dynamomètre (figure 13).

En utilisant cette géométrie, le **BP** a une très grande rigidité selon l’axe des **z** et cette valeur est très petite comparée à la valeur de la rigidité principale. Le comportement du **BP** s’avère linéaire, avec une hystérésis quasiment nulle. Aux points de charge et de décharge la pièce n’est pas influencée par les phénomènes de frottement ni par les différents jeux générés par les éléments assemblés, tels que la broche ou les roulements à billes. La matrice des raideurs  $[K_{F,BP}]$  obtenue selon les trois directions est donnée par l’équation (21). Nous observons très clairement que la raideur la plus importante est située sur **z**, ce qui est absolument cohérent avec la configuration du **BP**. Nous remarquons que la broche et ses roulements à billes diminuent la rigidité globale du **BP** par rapport à la rigidité calculée dans la section 4.2.