MIRCEA DEGERATU

ANALIZĂ DIMENSIONALĂ, SIMILITUDINE ȘI MODELARE

ÎNDRUMAR PENTRU APLICAȚII ÎN MECANICA FLUIDELOR ŞI HIDRAULICĂ

Editura
ACADEMIEI OAMENILOR DE ȘTIINȚĂ DIN ROMÂNIA

BUCUREŞTI
2015

Referent ştiinţific:
Prof. univ. dr. ing. Radu DAMIAN
Departamentul de Hidraulică şi Protecţia Mediului
Universitatea Tehnică de Construcţii Bucureşti

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
DEGERATU, MIRCEA
Analiză dimensională, similitudine şi modelare : îndrumar pentru aplicaţii în mecanica fluidelor şi hidaulică / Mircea Degeratu. - Bucureşti : Editura Academiei Oamenilor de Ştiinţă din România, 2015
Bibliogr.
ISBN 978-606-8636-02-3

53(075.8)

Editura Academiei Oamenilor de Știință din România

Prefață

În cadrul Laboratorului de Hidraulică și Laboratorului de Aerodinamică și Ingineria Vântului de pe lângă Departamentul de Hidraulică și Protecția Mediului din Universitatea Tehnică de Construcții București, se efectuează în mod curent cercetări experimentale, pe modele la scară redusă, asupra diferitelor fenomene din mecanica fluidelor și hidraulică, atât în cadrul procesului didactic, de către studenții de la cele trei cicluri de studii, licență, master și doctorat, cât și în cadrul procesului de cercetare științifică pe bază de contract, de către cadrele didactice și cercetătorii din cadrul laboratoarelor departamentului. Efectuarea de astfel de cercetări pe modele, în condiții de laborator, necesită atât cunoașterea teoriilor analizei dimensionale și similitudinii, cât și a regulilor de modelare fizică.

Modelarea fizică reprezintă o metodă de rezolvare a unor probleme concrete având la bază studiul experimental al unui fenomen la scară naturală, de pe prototip, prin intermediul unui fenomen similar, la scară redusă, realizat pe model, în condiții de laborator. Modelarea fizică utilizează atât teoremele analizei dimensionale și similitudinii, cât și metode specifice modelării fizice.

Studiile experimentale, pe modele fizice, sunt folosite cu scopul soluționării unor probleme ce nu pot fi rezolvate prin metode analitice sau prin metode numerice aproximative, precum și cu scopul verificării experimentale a rezultatelor obținute prin utilizarea unor modele numerice, în vederea validării acestora.

Una dintre ideile centrale ale lucrării este posibilitatea practică de a aduce în laborator, pentru a fi cercetate, fenomene de mecanica fluidelor și hidraulică care, în natură, sunt extrem de complexe.

Prezenta lucrare se constituie într-un îndrumar pentru rezolvarea de aplicații din domeniul modelării fizice a fenomenelor specifice mecanicii fluidelor și hidraulicii și este structurată pe patru părți, acestea cuprinzând atât elemente fundamentale privind teoriile analizei dimensionale, similitudinii și respectiv modelării, în primele trei părți, cât și aplicații ale acestora prin o serie de exemple de modelare fizică a unor fenomene aparținând mecanicii fluidelor și hidraulicii, în partea a patra.

Astfel, în ultima parte a lucrării sunt prezentate 25 de exemple privind modelarea fizică, în condiții de laborator, a unor fenomene complexe de mecanica fluidelor și hidraulică. Pentru fiecare exemplu, se urmărește determinarea criteriilor de similitudine, condițiilor de similitudine și relațiilor între scările mărimilor determinante în desfășurarea acestor fenomene, pentru aceasta utilizându-se fie metoda forțelor, fie metoda teoremei π a analizei dimensionale, fie metoda punerii sub formă adimensională a ecuațiilor care descriu fenomenele studiate.

De asemenea, pentru fiecare din exemplele prezentate în ultima parte a lucrării, se prezintă, pe lângă modul de determinare a condiţiilor de similitudine și modul în care acestea pot fi realizate, aceste elemente aparținând etapei teoretice a modelării fizice, și elemente privind exploatarea modelelor și realizarea măsurătorilor, aceste elemente aparținând etapei tehnologico-experimentale a modelării fizice a fenomenelor de mecanica fluidelor și hidraulică abordate.

Lucrarea se adresează, în primul rând, studenților din ciclul I de studii, licență, și celor din ciclul II de studii, master, de la facultățile de Ingineria Instalațiilor, Hidrotehnică, Utilaj Tehnologic, Căi Ferate Drumuri și Poduri și Construcții Civile Industriale și Agricole din cadrul Universității Tehnice de Construcții București.

De asemenea, lucrarea este utilă și studenților doctoranzi care, în cadrul elaborării tezei de doctorat, realizează modelări fizice pentru diferite fenomene specifice mecanicii fluidelor și hidraulicii.

Totodată, cartea este folositoare și cadrelor didactice universitare și cercetătorilor care, în activitatea lor de cercetare științifică, utilizează metoda modelării fizice în rezolvarea diverselor aplicații din domeniile mecanicii fluidelor și hidraulicii.

Prof. univ. dr. ing. Mircea DEGERATU

Mircea DEGERATU

ANALIZĂ DIMENSIONALĂ, SIMILITUDINE ȘI MODELARE
Îndrumar pentru aplicații în mecanica fluidelor și hidraulică

CUPRINS

A. ELEMENTE DE ANALIZĂ DIMENSIONALĂ 9
1. Analiza dimensională în mecanica fluidelor și hidraulică 10
2. Mărimi fizice. Relații fizice 12
3. Mărimi adimensionale 15
4. Teoremele analizei dimensionale 19
5. Metoda lui Rayleigh 22
6. Metoda lui Buckingham 25

B. ELEMENTE DE SIMILITUDINE 29
7. Similitudinea hidraulică 30
8. Teoremele similitudinii 32
9. Similitudinea geometrică, cinematică și dinamică 34
10. Metoda teoremei π a analizei dimensionale 37
11. Metoda forțelor 39
12. Metoda punerii sub formă adimensională a ecuaţiilor problemă 43

C. ELEMENTE DE MODELARE FIZICĂ 47
13. Modelarea fizică a fenomenelor hidraulice 48
14. Efect de scară, distorsiuni și automodelare 52

D. EXEMPLE DE MODELARE FIZICĂ ÎN MECANICA FLUIDELOR ȘI HIDRAULICĂ 57
15. Modelarea fizică a interacțiunii câmpului de valuri cu captatorul de energie a valurilor de tip flotor 58
15.1. Similitudinea geometrică pentru modelarea fizică în canalul de valuri 59
15.2. Similitudinea cinematică pentru modelarea fizică în canalul de valuri 60
15.3. Similitudinea dinamică pentru modelarea fizică în canalul de valuri 61
15.4. Relaţiile între scările mărimilor specifice fenomenului studiat pentru modelarea fizică în canalul de valuri 64

16. Modelarea fizică a stratului limită atmosferic dinamic 67
16.1. Caracteristicile vântului din zona stratului limită atmosferic 67
16.2. Simularea stratului limită atmosferic în tunele aerodinamice 72
16.2.1. Simularea stratului limită atmosferic în tunele aerodinamice cu venă experimentală scurtă (cu strat limită artificial) 73
16.2.2. Simularea stratului limită atmosferic în tunele aerodinamice cu venă experimentală lungă (cu strat limită natural) 76
17. Modelarea fizică a interacțiunii dintre vânt/curent de apă și rotorul unei turbine eoliene/hidroliene cu ax vertical 84
18. Modelarea fizică a acțiunii vântului pe construcții și structuri cu răspuns static (fără răspuns dinamic) 90
19. Modelarea fizică a acțiunii vântului pe construcții și structuri cu răspuns dinamic 98
19.1. Tipuri de modele de structuri cu răspuns dinamic 101
19.2. Cazul testelor aerodinamice pe modele aeroelastice întregi de poduri suspendate 102
19.3. Cazul testelor aerodinamice pe modele aeroelastice secționale de poduri suspendate 105
19.4. Cazul testelor aerodinamice pe modele aeroelastice întregi de structuri înalte 106
19.5. Cazul testelor aerodinamice pe modele aeroelastice secționale de turnuri, coșuri și coloane 111
20. Modelarea mecanică a fenomenelor de eroziune, transport și aglomerare a zăpezii sub acțiunea vântului 112
20.1. Modelarea mișcării pe verticală a particulelor de zăpadă .. 113
20.2. Modelarea antrenării particulelor de zăpadă de către vânt 115
20.3. Modelarea transportului în suspensie al particulelor de zăpadă. Creșterea grosimii stratului de zăpadă în unitatea de timp 116
21. Simularea stratului limită atmosferic dinamic şi termic în tunel aerodinamic meteorologic 124
21.1. Consideraţii generale privind similitudinea aferentă curgerilor din stratul limită atmosferic 125
21.1.1. Similitudinea pentru curgerea laminară în stratul limită atmosferic 125
21.1.2. Similitudinea pentru curgerea turbulentă în stratul limită atmosferic 129
21.1.3. Simularea condiţiilor la limită 133

21.2. Similitudinea caracteristicilor mişcării medii din stratul limită atmosferic 134
21.2.1. Modelarea stratului limită neutru 134
21.2.2. Modelarea stratului limită stratificat 136
21.3. Similitudinea caracteristicilor de turbulenţă pentru mişcările din stratul limită atmosferic 141
21.3.1. Turbulenţa la scară mică pentru un strat limită cu structură termică neutră 141
21.3.2. Turbulenţa la scară mare pentru un strat limită cu structură termică neutră 142
22. Modelarea poluării atmosferice în tunel aerodinamic meteorologic 143
23. Modelarea deplasării unui corp solid într-un fluid 147
23.1. Rezistența la înaintare și criteriile de similitudine 147
23.2. Modelarea deplasării unui submersibil în apă de mare 149
24. Modelarea interacțiunii dintre un curent de fluid și un tronson cu profil de aripă 156
25. Modelarea interacțiunii dintre vânt și turbinele eoliene carcasate pentru studii de amplasament 162

BIBLIOGRAFIE 167

A. ELEMENTE DE ANALIZĂ DIMENSIONALĂ

1. ANALIZA DIMENSIONALĂ ÎN MECANICA FLUIDELOR
   ȘI HIDRAULICĂ
2. MĂRIMI FIZICE. RELAȚII FIZICE
3. MĂRIMI ADIMENSIONALE
4. TEOREMELE ANALIZEI DIMENSIONALE
5. METODA LUI RAYLEIGH
6. METODA LUI BUCKINGHAM

1. ANALIZA DIMENSIONALĂ ÎN MECANICA FLUIDELOR ȘI HIDRAULICĂ

În mecanica fluidelor și hidraulică, principalele metode de lucru sunt cercetările experimentale de laborator și testele experimentale realizate la scară naturală, alături de cercetările teoretice. Realizarea legăturii dintre aceste metode de lucru se face prin intermediul *analizei dimensionale* și a unui proces complex de raționare ce permite interpretarea fenomenelor de mecanica fluidelor și hidraulică în lumina principiilor mecanicii. În acest sens, se poate afirma faptul că, în timp ce cu ajutorul analizei dimensionale se pot stabili expresii fără dimensiuni ale variabilelor considerate determinante în desfășurarea fenomenelor de mecanica fluidelor și hidraulică studiate, prin folosirea raționamentului și mai ales a teoriei similitudinii se pot obține soluții generale ca rezultat al aplicării celor două metode de studiu.

Cercetarea experimentală poate fi realizată în condiții de laborator, caz în care fenomenul de mecanica fluidelor sau hidraulică este redus la scară pe baza regulilor de modelare. Cercetările au ca obiect de studiu modelul fizic, iar metoda de cercetare utilizată se numește modelare fizică.

Pentru realizarea modelului fizic trebuie respectate condițiile de similitudine geometrică, cinematică și dinamică specifice fenomenelor de mecanica fluidelor și hidraulică, *analiza dimensională* având un rol important în stabilirea criteriilor și condițiilor de similitudine.

Utilizarea metodei experimentale pentru obținerea în mod direct a unor rezultate privind rezolvarea unei probleme concrete de mecanica fluidelor sau hidraulică, în lipsa unui model matematic adecvat, se face pe modele fizice, la scară redusă, în condiții de laborator, în acest caz fiind posibilă eliminarea involuntară a unor aspecte ale fenomenului studiat a căror pondere în desfășurarea fenomenului nu poate fi apreciată în mod satisfăcător. În acest sens, trebuie menționat faptul că folosirea rezultatelor testelor experimentale trebuie făcută numai în domeniul în care ele au fost obținute , evitându-se extrapolările.

Analiza dimensională se ocupă cu studiul relaţiilor ce descriu fenomenele fizice și are la bază proprietatea de omogenitate dimensională, proprietate ce trebuie respectată de toate relațiile raționale și se urmărește să fie respectată de toate relațiile empirice. Omogenitatea dimensională a relațiilor fizice este necesară deoarece, prin aceasta, se asigură invariabilitatea lor la schimbarea sistemului de unități de măsură.

Analiza dimensională se ocupă cu studiul relaţiilor fizice pentru a găsi regulile după care se stabilesc formele generale ale acestor relaţii şi modul în care aceste reguli se aplică în cercetarea ştiinţifică.

Analiza dimensională în mecanica fluidelor și hidraulică are la bază principiul că fenomenele din mecanica fluidelor și fenomenele hidraulice, ca toate fenomenele naturii, sunt guvernate de legi obiective, care pot să fie cunoscute, precum şi ideea că aceste legi pot fi exprimate cu ajutorul unor relaţii fizice care, de asemenea, pot fi transformate în relaţii matematice.

Interacțiunile dintre mărimile fizice în cadrul unui fenomen au putut fi exprimate calitativ și cantitativ prin relații o dată cu dezvoltarea simbolismului matematic bazat pe un îndelungat proces de abstractizare. *Relaţiile fizice sunt relaţii între mărimi fizice*, iar *relațiile matematice sunt relaţii între numere abstracte*.

O etapă importantă în aplicarea analizei dimensionale o reprezintă stabilirea mărimilor fizice determinante ce intervin în descrierea fenomenului hidraulic studiat. În situaţia în care sunt cunoscute ecuaţiile matematice corespunzătoare fenomenului hidraulic studiat, această etapă nu pune probleme. Dacă ecuaţiile ce descriu fenomenul hidraulic nu sunt stabilite, atunci trebuie analizat fenomenul hidraulic respectiv şi determinate, eventual experimental, mărimile fizice caracteristice.

În procesul de formare a relațiilor fizice, acestea au căpătat forme stabile, care se păstrează și la trecerea în formă matematică, în concordanță cu caracterul obiectiv al legilor pe care le exprimă. Acest lucru se manifestă prin faptul că forma unei relații fizice este astfel alcătuită încât ea nu depinde de elementul subiectiv al alegerii sistemului de unități de măsură, cu ajutorul căruia se exprimă mărimile fizice și se formează numerele care intră în aceste relații.

2. MĂRIMI FIZICE. RELAȚII FIZICE

Fenomenele de mecanica fluidelor și fenomenele hidraulice, ca toate fenomenele fizice, *pot fi descrise prin relații fizice*. Interacțiunile dintre mărimile fizice în cadrul unui fenomen au putut fi exprimate calitativ și cantitativ prin relații o dată cu dezvoltarea simbolismului matematic bazat pe un îndelungat proces de abstractizare. Relaţiile fizice sunt relaţii între mărimi fizice, iar cele matematice sunt relaţii între numere abstracte.

Noţiunea de mărime fizică reflectă cantitativ şi calitativ o anumită latură a unui fenomen fizic; cantitativ, prin posibilitatea asocierii biunivoce a unei mărimi matematice sau geometrice, iar calitativ, prin aceea că această asociere se face în raport cu o proprietate de referinţă dată, de aceeaşi natură, denumită unitate de măsură. Acest lucru poate fi exprimat prin relaţia simbolică:

$$\frac{\text{mărime}}{(\text{mărime fizică})} = \frac{\text{valoare}}{(\text{număr})}\ \text{unitate de măsură} \tag{2-1}$$

Dacă se notează cu *X* valoarea mărimii fizice *x* în raport cu o unitate de măsură *a*, relația de mai sus poate fi scrisă sub formă literală astfel:

$$x = Xa. \tag{2-2}$$

Valoarea exprimă numai cantitativ un aspect al fenomenului studiat și, în acest sens, are caracter de număr abstract fiind însă legată de fenomenul pe care îl reprezintă și de operația de măsurare prin care a fost introdusă, legătură exprimată prin relația simbolică:

$$X = \frac{x}{a}. \qquad (2\text{-}3)$$

Mărimile fizice pot fi mărimi fundamentale sau mărimi derivate.

Mărimile fizice fundamentale sunt mărimile care nu se definesc cu ajutorul altor mărimi, iar *mărimile fizice derivate* sunt cele care se definesc cu ajutorul mărimilor fundamentale.

În România este adoptat Sistemul Internaţional de unităţi de măsură SI, care cuprinde şapte mărimi fizice fundamentale și unitățile lor de măsură, dintre care, mărimile fizice utilizate în problemele de mecanică deci și de mecanica fluidelor, sunt:

- metrul (m) pentru lungime;
- kilogramul (kg) pentru masă;
- secunda (s) pentru timp.

Celelalte mărimi fizice printre care și forța și unitățile lor de măsură sunt derivate.

Dacă în relaţiile de definiţie ale mărimilor fizice derivate se înlocuiesc mărimile fundamentale prin simbolurile lor dimensionale (L pentru lungime, M pentru masă, T pentru timp) se obţin *ecuaţii (formule) dimensionale* cum ar fi, spre exemplu, ecuația dimensională a forței, mărime derivată într-un sistem de mărimi fundamentale L, M, T așa cum este Sistemul Internațional de unităţi de măsură SI :

$$[F]_{SI} = [m]\,[a] = [m]\,[\mathrm{d}u/\mathrm{d}t] = \mathrm{LMT}^{-2}\,. \qquad (2\text{-}4)$$

Pentru o mărime derivată, *ecuația unității de măsură* se poate stabili înlocuind mărimile fundamentale din ecuația dimensională cu unitățile lor de măsură. Pe baza acestei ecuații, se obține unitatea de măsură derivată. Astfel, spre exemplu, ecuația unității de măsură a forței în sistemul internațional SI este:

$$\langle F \rangle_{SI} = \mathrm{m\ kg\ s^{-2}} = \mathrm{kg\ m/s^2} = \mathrm{N}. \qquad (2\text{-}5)$$

În afara sistemului SI mai sunt tolerate, în practică, unele sisteme de unități de măsură, fie datorită obișnuinței folosirii acestora în deceniile trecute, așa cum este sistemul CGS (centimetru, gram, secundă), fie datorită utilizării unor aparate de măsură de tip mai vechi așa cum este sistemul tehnic MKfS (metru, kilogram-forță, secundă).

Sistemul de unități de măsură CGS are ca mărimi fundamentale L, M, T (lungime, masă, timp), celelalte mărimi printre care și forța sunt derivate.

Sistemul de unități de măsură MKfS are ca mărimi fundamentale L, F, T (lungime, forță, timp), celelalte mărimi printre care și masa sunt derivate.

Mărimile fizice de aceeași natură pot fi adunate sau scăzute dacă valorile lor sunt exprimate cu aceeași unitate de măsură, operațiile simbolice fiind:

$$x \pm y = Xa \pm Ya = (X \pm Y)a, \tag{2-6}$$

a fiind unitatea de măsură comună.

Înmulțirea sau împărțirea se efectuează separat pentru numere și separat pentru unitățile de măsură, spre exemplificare, pentru înmulțire, operația simbolică fiind:

$$z = xy = (Xa)(Yb) = (XY)(ab) = Z\,c. \tag{2-7}$$

Rezultatul înmulțirii este o nouă mărime fizică cu valoarea $Z = XY$ și cu unitatea de măsură $c = ab$.

În mod asemănător se efectuează ridicările la putere și produsele sau rapoartele de mărimi fizice ridicate la diferite puteri.

3. MĂRIMI ADIMENSIONALE

Mărimile adimensionale sunt mărimile care au dimensiune nulă în raport cu anumite specii de mărimi de referinţă.

Într-o altă accepțiune, *mărimile adimensionale sunt mărimile definite prin rapoarte de mărimi care au aceleaşi dimensiuni sau prin monoame adimensionale de mărimi dimensionale.* Aceste mărimi sunt definite în legătură cu un fenomen concret dat. Mărimile adimensionale astfel definite se numesc *complexe adimensionale* sau *produse adimensionale.*

Complexele adimensionale pot fi privite și ca *numere*, fiind definite printr-o relație simbolică de tipul

$$\pi_{y_i} = \frac{y_i}{y_0} \tag{3-1}$$

unde mărimea fizică y_i și mărimea de referință y_0 au aceleași dimensiuni ($[y_i] = [y_0]$).

Complexele adimensionale cu roluri speciale se numesc *criterii* şi au notaţii speciale (Re-Reynolds, Eu-Euler, Fr-Froude, Ma-Mach, We-Weber, Ca-Cauchy etc.).

Daca se consideră mărimile fizice determinante în descrierea unei clase de fenomene, cu ajutorul lor se poate obţine un număr mare de complexe adimensionale, dar nu toate independente între ele. *Totalitatea complexelor adimensionale independente între ele şi care au proprietatea că orice complex format din mărimile fizice date se exprimă sub forma unui produs de puteri a acestora, formează un sistem fundamental de complexe adimensionale*.

Astfel, considerând câteva din mărimile fizice determinante în descrierea fenomenelor din cadrul mecanicii fluidelor şi anume: lungimea caracteristică *l*, viteza fluidului *u*, densitatea fluidului *ρ*, coeficientul dinamic de viscozitate al fluidului *μ*, presiunea *p*, acceleraţia gravitaţională *g*, viteza sunetului *a* şi coeficientul de tensiune superficială *σ*, cu aceste mărimi se pot forma următoarele criterii:

- *criteriul Reynolds* care constituie condiția de bază pentru modelul în care forțele de viscozitate sunt dominante

$$\mathrm{Re} = \frac{ul\rho}{\mu} = \frac{ul}{\nu}; \tag{3-2}$$

- *criteriul Euler* care se folosește atunci când, pe lângă forțele de inerție, trebuie luate în considerare și forțele de presiune

$$Eu = \frac{p}{\rho u^2}; \tag{3-3}$$

- *criteriul Froude* care se folosește la modelarea mișcărilor la care forța de greutate este predominantă

$$Fr = \frac{u^2}{gl}; \tag{3-4}$$

- *criteriul Mach* care se folosește la modelarea mișcărilor la care se ține cont de compresibilitatea fluidului

$$Ma = \frac{u}{a}; \tag{3-5}$$

- *criteriul Weber* care se folosește la modelarea acelor mișcări la care, pe lângă forțele de inerție, forța de tensiune superficială este predominantă

$$We = \frac{\rho u^2 l}{\sigma}. \tag{3-6}$$

Atunci când mișcarea este nepermanentă, se introduce *criteriul Strouhal*:

$$Sh = l/ut \qquad (3\text{-}7)$$

unde *t* reprezintă timpul caracteristic.

Tabelul 3.1

Principalele criterii de similitudine folosite în mecanica fluidelor și hidraulică

Criterii	**Rapoarte de forțe**	**Domenii de aplicare în modelarea fizică**
Reynolds $\mathrm{Re} = \frac{ul\rho}{\mu} = \frac{ul}{\nu}$	Forța de inerție / Forța de viscozitate	Mișcarea fluidului în jurul unui corp solid Mișcarea în conducte sub presiune
Euler $Eu = \frac{p}{\rho u^2}$	Forța de presiune / Forța de inerție	Determinarea rezistenței la înaintare
Froude $Fr = \frac{u^2}{gl}$	Forța de inerție / Forța gravitațională	Mișcarea cu suprafață liberă
Froude densimetric $Fr_d = \frac{u^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho} gl}$	Forța de inerție / Forța masică datorată diferențelor de densitate	Mișcări libere cu diferențe de densitate
Mach * $Ma = \frac{u}{a} = \frac{u}{\sqrt{\frac{E}{\rho}}}$	Forța de inerție / Forța masică datorată elasticității fluidului	Mișcări cu viteze mari la care își face efectul compresibilitatea
Weber $We = \frac{\rho u^2 l}{\sigma}$	Forța de inerție / Forța datorată tensiunii superficiale	Mișcarea cu suprafață liberă cu adâncime foarte mică
Cauchy ** $Ca = \frac{\rho u^2}{E_C}$	Forța de inerție / Forța datorată elasticității corpului solid în contact cu fluidul	Modelarea vibrațiilor corpurilor solide sub acțiunea unui fluid în mișcare

----

*) *E* este modulul de elasticitate al fluidului,

**) E_C este modulul de elasticitate al corpului solid.

Criteriile astfel obţinute sunt complexe adimensionale independente între ele, deoarece nici unul nu poate fi exprimat printr-un produs de puteri ale celorlalte și deci formează un sistem fundamental de criterii.

În tabelul 3.1 se prezintă, în mod sintetic, principalele criterii de similitudine utilizate în mecanica fluidelor și hidraulică, rapoartele de forțe care pun în evidență semnificația fizică a criteriilor și domeniile de aplicare a acestora în modelarea fizică a fenomenelor studiate.

Dacă un fenomen fizic concret este descris de mai multe mărimi fizice de aceeași natură (cu aceleași dimensiuni), orice raport a două dintre aceste mărimi reprezintă un complex adimensional.

Din punct de vedere al interpretării fizice, complexele adimensionale sunt privite, în general, ca rapoarte dintre diferite categorii de energii, forțe sau mărimi cinematice importante pentru fenomenul hidraulic studiat. Spre exemplu, criteriul Euler poate fi interpretat ca raportul dintre energia potențială de presiune și energia cinetică a unui fluid sau ca raportul dintre forțele de legătură de presiune și forțele date de acțiunea unui fluid în mișcare, cu viteza *u*, asupra aceleiași suprafețe etc.

4. TEOREMELE ANALIZEI DIMENSIONALE

Analiza dimensională are la bază proprietatea de omogenitate dimensională, proprietate ce trebuie respectată de toate relațiile raționale și se urmărește să fie respectată de toate relațiile empirice. Omogenitatea dimensională a relațiilor fizice este necesară deoarece, prin aceasta, se asigură invariabilitatea lor la schimbarea sistemului de unități de măsură.

Analiza dimensională se bazează pe principiul că fenomenele hidraulice sunt guvernate de legi obiective şi pe ideea că aceste legi pot fi exprimate cu ajutorul unor relaţii fizice care pot fi transformate în relaţii matematice.

Prima teoremă a analizei dimensionale (*teorema omogenității*):

O relație fizică poate fi reductibilă la o relație între numere dacă ea este omogenă din punct de vedere dimensional în raport cu un sistem coerent de unități de măsură.

Condiția exprimată de teoria omogenității înseamnă, de fapt, că într-o relație fizică toți termenii trebuie să aibă aceeași formulă dimensională într-un anumit sistem dimensional. Astfel, toți termenii relației se exprimă cu aceeași unitate de măsură cu care, formal, se poate simplifica, relația devenind abstractă.

A doua teoremă a analizei dimensionale:

O relație fizică, omogenă în raport cu un anumit sistem coerent de unități de măsură, nu își modifică forma la schimbarea sistemului de unități de măsură, dacă și numai dacă dimensiunile mărimilor derivate se exprimă în ambele sisteme sub formă de produse de puteri.

A treia teoremă a analizei dimensionale (*teorema produselor sau teorema π a analizei dimensionale sau teorema Buckingham*):

O relaţie fizică scrisă între n mărimi fizice

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}), \tag{4-1}$$

care reflectă un fenomen concret dat, construită cu respectarea primelor două teoreme ale analizei dimensionale (teoremele omogenităţii şi invariabilităţii) şi care cuprinde n mărimi exprimate în sistemul standard de unităţi de măsură, poate fi scrisă ca o relaţie între n-k complexe adimensionale dacă se renunţă la sistemul standard de unităţi de măsură şi se adoptă un sistem propriu fenomenului studiat format din k mărimi ale relaţiei, considerate ca fundamentale.

Complexele adimensionale se notează cu π, iar relația criterială se scrie sub forma

$$\pi_{y_i} = \varphi\,(1,\ 1,\ldots 1,\ \pi_{x_{k+1}},\ldots\ \pi_{x_{n-1}}) \qquad (4\text{-}2)$$

alegând ca mărimi fundamentale x_1, x_2,...x_k .

Complexele adimensionale au expresia generală

$$\pi_x = \frac{x}{x_1^{a_1}\cdot x_2^{a_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{a_k}} \qquad (4\text{-}3)$$

cele corespunzătoare mărimilor alese ca fundamentale fiind egale cu 1:

$$\pi_{x_1} = 1,\ \pi_{x_2} = 1,\ \ldots\ \pi_{x_k} = 1. \qquad (4\text{-}4)$$

Rezultă deci relația

$$y_i = \varphi\left(\pi_{x_{k+1}},\ldots\pi_{x_{n-1}}\right)\cdot x_1^{a_1^i}\cdot x_2^{a_2^i}\ldots\cdot x_k^{a_k^i}\ . \qquad (4\text{-}5)$$

Relația de mai sus exprimă mărimea y_i ca funcție monomă de k mărimi principale, care sunt tocmai mărimile alese ca fundamentale, dependența de celelalte mărimi fiind exprimată printr-o funcție globală de complexele adimensionale corespunzătoare acestora.

Obţinerea unei relaţii criteriale (relaţie între complexe adimensionale) *pentru un anumit fenomen concret, comportă două dificultăţi şi anume*:

a) *stabilirea mărimilor determinante* ce caracterizează fenomenul respectiv, mărimi ce nu pot fi determinate decât printr-o analiză experimentală a fenomenului;

b) *alegerea mărimilor fundamentale*, mărimi ce trebuie să respecte condiţiile:

- să fie independente adimensional;
- dimensiunile mărimilor derivate să se exprime ca produse de puteri funcţie de mărimile considerate ca fundamentale.

Stabilirea ecuaţiei criteriale este foarte importantă datorită faptului că se reduce numărul mărimilor şi că ea nu exprimă un fenomen izolat ci o clasă de fenomene.

5. METODA LUI RAYLEIGH

Metoda lui Rayleigh poate fi aplicată pentru stabilirea formei structurale a unei relaţii fizice, dacă se cunosc mărimile fizice determinante ce caracterizează fenomenul studiat; ecuaţiile diferenţiale ce descriu fenomenul şi expresiile forţelor ce intervin în fenomen pot fi necunoscute.

Metoda lui Rayleigh constă în aceea că o mărime fizică caracteristică a fenomenului considerat este proporţională cu un produs de puteri al mărimilor fizice determinante în desfăşurarea fenomenului. Exponenţii se pot determina punând condiţia de omogenitate dimensională a ambilor membri ai egalităţii obţinute.

În cele ce urmează, se prezintă **un exemplu de aplicare a metodei lui Rayleigh** și anume **stabilirea formei structurale a relaţiei forței cu care un curent de fluid acționează asupra unui corp solid**. Astfel, se consideră că forța F cu care curentul de fluid acționează asupra corpului solid este funcție de următoarele mărimi fizice caracteristice fenomenului: densitatea ρ a fluidului, aria proiectată A a corpului solid pe un plan transversal mișcării, viteza u a curentului de fluid, coeficientul dinamic de viscozitate μ al fluidului și accelerația gravitațională g . Relația fizică ce exprimă forța F are următoarea formă:

$$F = f(\rho, A, u, \mu, g)\,. \tag{5-1}$$

Conform metodei lui Reyleigh, relația de mai sus se poate scrie sub forma:

$$F = C \cdot \rho^a \cdot A^b \cdot u^c \cdot \mu^d \cdot g^e\,. \tag{5-2}$$

Dacă se scrie această ecuație sub formă adimensională, rezultă:

$$MLT^{-2} = (ML^{-3})^a (L^2)^b (LT^{-1})^c (ML^{-1}T^{-1})^d (LT^{-2})^e \tag{5-3}$$

sau

$$MLT^{-2} = M^{a+d} L^{-3a+2b+c-d+e} T^{-c-d-2e} . \tag{5-4}$$

Din condiția de omogenitate, se pot identifica exponenții care rezultă

$$a = 1 - d; b = 1 - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e; c = 2 - d - 2e; \tag{5-5}$$

de unde

$$F = C \cdot \rho^{1-d} \cdot A^{1-\frac{1}{2}d+\frac{1}{2}e} \cdot u^{2-d-2e} \cdot \mu^d \cdot g^e \tag{5-6}$$

sau:

$$F = C\left(\frac{\mu}{\rho \cdot u \cdot \sqrt{A}}\right)^d \cdot \left(\frac{g \cdot \sqrt{A}}{u^2}\right)^e \cdot \rho \cdot A \cdot u^2 . \tag{5-7}$$

Înlocuind $\sqrt{A} = l$ (lungime caracteristică) și observând că expresiile din paranteze sunt complexe adimensionale și anume

$$\frac{\mu}{\rho \cdot u \cdot l} = \frac{\vartheta}{ul} = \frac{1}{Re} \quad \text{și} \quad \frac{gl}{u^2} = \frac{1}{Fr} \tag{5-8}$$

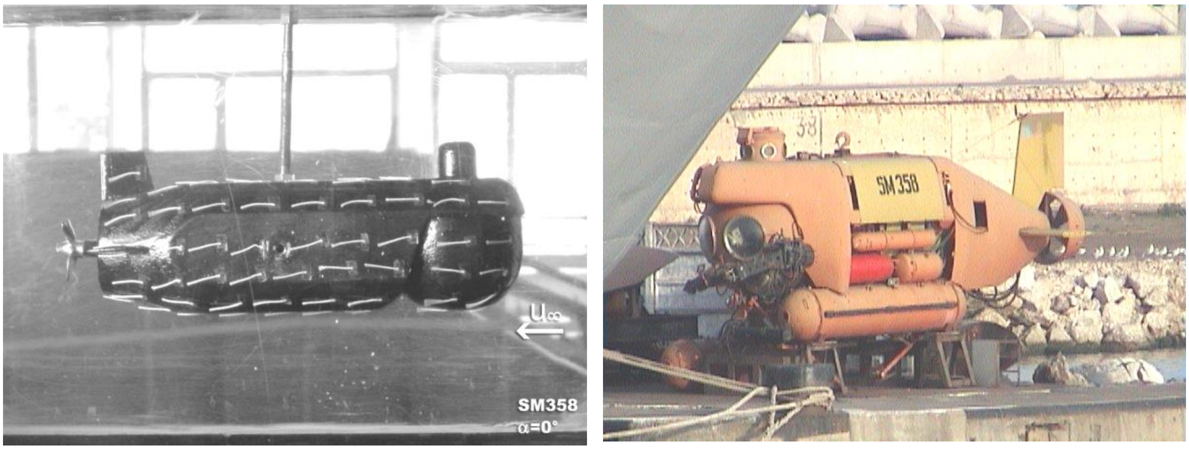
expresia lui *F* devine:

$$F = \varphi(Re, Fr) \cdot \rho \cdot A \cdot u^2 \tag{5-9}$$

Expresia de mai sus reprezintă forma structurală a relației forței cu care un curent de fluid acționează asupra unui corp solid, ținând cont atât de influența forțelor de viscozitate cât și a forțelor de greutate.

Funcția $\varphi(Re, Fr)$ reprezintă un coeficient aerodinamic **/** hidrodinamic global ce poate fi determinat experimental.

De asemenea, sunt puse în evidență criteriile de similitudine *Re* (Reynolds) și *Fr* (Froude) care stau la baza procesului de simulare în laborator, pe model la scară redusă (M), a fenomenului la scară naturală (N). Criteriile *Re* și *Fr* sunt incompatibile și, prin urmare trebuie ales criteriul cel mai important în desfășurarea fenomenului. Spre exemplu, pentru modelarea deplasării unui submersibil în apă, la o adâncime la care poate fi neglijată influența suprafeței libere, se alege criteriul *Re* ca determinant în procesul de modelare (fig. 5.1).



a **b**

Fig. 5.1. a – Modelul unui submersibil (M) în vena experimentală a tunelului aerodinamic; **b** –Submersibilul la scară naturală (N)

6. METODA LUI BUCKINGHAM

Metoda lui Buckingham (metoda teoremei π) are la bază teorema produselor (teorema π a analizei dimensionale) și poate fi aplicată pentru stabilirea formei structurale a unei relaţii fizice, dacă se cunosc mărimile fizice determinante ce caracterizează fenomenul studiat.

Soluţia unei probleme se poate exprima sub forma unei relaţii între mărimile ce descriu fenomenul, relaţie care trebuie să fie omogenă dimensional şi să nu se modifice la schimbarea sistemului de unităţi de măsură. Aceste condiţii sunt îndeplinite de relaţii scrise între complexe adimensionale și deci *condiţia suficientă ca o relaţie să fie omogenă dimensional şi invariantă la modificarea sistemului de unităţi de măsură este ca aceasta să poată fi redusă la o relaţie între complexe adimensionale*. Această condiţie este şi necesară, acest fapt constituind în esenţă teorema lui Buckingam (teorema π) având următorul enunţ: o relaţie fizică scrisă între *n* mărimi fizice

$$y_i = f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_{n-1}), \quad (6\text{-}1)$$

care reflectă un fenomen concret dat, construită cu respectarea primelor două teoreme ale analizei dimensionale (teoremele omogenităţii şi invariabilităţii) şi care cuprinde *n* mărimi exprimate în sistemul standard de unităţi de măsură, poate fi scrisă ca o relaţie între *n-k* complexe adimensionale dacă se renunţă la sistemul standard de unităţi de măsură şi se adoptă un sistem propriu fenomenului studiat format din *k* mărimi ale relaţiei, considerate ca fundamentale.

Complexele adimensionale se notează cu π, iar relația criterială se scrie sub forma

$$\pi_{y_i} = \varphi\,(1, 1, \dots 1, \pi_{x_{k+1}}, \dots \pi_{x_{n-1}}) \quad (6\text{-}2)$$

alegând ca mărimi fundamentale $x_1, x_2, \ldots x_k$.

Complexele adimensionale au expresia generală

$$\pi_x = \frac{x}{x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{a_k}} \tag{6-3}$$

cele corespunzătoare mărimilor alese ca fundamentale fiind egale cu 1.

Rezultă deci relația

$$y_i = \varphi\left(\pi_{x_{k+1}}, \ldots \pi_{x_{n-1}}\right) \cdot x_1^{a_1^i} \cdot x_2^{a_2^i} \ldots \cdot x_k^{a_k^i} \,. \tag{6-4}$$

Relația de mai sus exprimă mărimea y_i ca funcție monomă de k mărimi principale, care sunt tocmai mărimile alese ca fundamentale, dependența de celelalte mărimi fiind exprimată printr-o funcție globală de complexele adimensionale corespunzătoare acestora.

Pentru determinarea exponenților $a_1, \ldots a_k$, se pune condiția de adimensionalitate și se procedează la identificarea acestora conform relației:

$$[\pi_x] = \frac{[x]}{[x_1^{a_1}] \cdot [x_2^{a_2}] \cdot \ldots [\cdot x_k^{a_k}]} = M^{\circ} L^{\circ} T^{\circ} = 1 \,. \tag{6-5}$$

Obţinerea unei relaţii criteriale (relaţie între complexe adimensionale) pentru un anumit fenomen concret, comportă două dificultăţi şi anume:

c) *stabilirea mărimilor determinante* ce caracterizează fenomenul respectiv, mărimi ce nu pot fi determinate decât printr-o analiză experimentală a fenomenului;

d) *alegerea mărimilor fundamentale*, mărimi ce trebuie să respecte condiţiile:

- să fie independente adimensional;
- dimensiunile mărimilor derivate să se exprime ca produse de puteri funcţie de mărimile considerate ca fundamentale.

Stabilirea ecuaţiei criteriale este foarte importantă datorită faptului că se reduce numărul mărimilor şi că ea nu exprimă un fenomen izolat ci o clasă de fenomene.

În continuare, se prezintă un **exemplu de aplicare a metodei lui Buckingham** (metoda teoremei π) și anume **stabilirea formei structurale a relației ce exprimă forța cu care un curent de aer acționează asupra rotorului unei turbine eoliene**. Forța F ce rezultă în urma interacțiunii dintre vânt și rotorul turbinei, este funcție de densitatea ρ , coeficientul dinamic de viscozitate μ și viteza u ale fluidului, de turația n și diametrul D ale rotorului turbinei eoliene și de accelerația gravitațională g , conform relației:

$$F = f(\rho, \mu, u, n, D, g). \tag{6-6}$$

Se aleg ca mărimi fundamentale ρ , u și D.

Relația de mai sus, care stabilește o legătură funcțională între șapte mărimi fizice dimensionale, se reduce prin aplicarea teoremei π la o relație între patru complexe adimensionale

$$\pi_F = \varphi(\pi_\mu, \pi_n, \pi_g) \tag{6-7}$$

în care

$$\pi_F = \frac{F}{\rho^{a_{11}} \cdot u^{a_{21}} \cdot D^{a_{31}}}; \quad \pi_\mu = \frac{\mu}{\rho^{a_{12}} \cdot u^{a_{22}} \cdot D^{a_{32}}}; \quad \pi_n = \frac{n}{\rho^{a_{13}} \cdot u^{a_{23}} \cdot D^{a_{33}}}; \quad \pi_g = \frac{g}{\rho^{a_{14}} \cdot u^{a_{24}} \cdot D^{a_{34}}} . \tag{6-8}$$

Punând condiția de adimensionalitate :

$$[\pi_F] = \frac{[F]}{[\rho]^{a_{11}} \cdot [u]^{a_{21}} \cdot [D]^{a_{31}}} = \frac{MLT^{-2}}{(ML^{-3})^{a_{11}} \cdot (LT^{-1})^{a_{21}} \cdot L^{a_{31}}} = M^{\circ} L^{\circ} T^{\circ} = 1 \tag{6-9}$$

$$[\pi_\mu] = \frac{[\mu]}{[\rho]^{a_{12}} \cdot [u]^{a_{22}} \cdot [D]^{a_{32}}} = \frac{ML^{-1}T^{-1}}{(ML^{-3})^{a_{12}} \cdot (LT^{-1})^{a_{22}} \cdot L^{a_{32}}} = M^{\circ} L^{\circ} T^{\circ} = 1 \tag{6-10}$$

$$[\pi_n] = \frac{[n]}{[\rho]^{a_{13}} \cdot [u]^{a_{23}} \cdot [D]^{a_{33}}} = \frac{T^{-1}}{(ML^{-3})^{a_{13}} \cdot (LT^{-1})^{a_{23}} \cdot L^{a_{33}}} = M^{\circ} L^{\circ} T^{\circ} = 1 \tag{6-11}$$

$$[\pi_g] = \frac{[g]}{[\rho]^{a_{14}} \cdot [u]^{a_{24}} \cdot [D]^{a_{34}}} = \frac{LT^{-2}}{(ML^{-3})^{a_{14}} \cdot (LT^{-1})^{a_{24}} \cdot L^{a_{34}}} = M^0 L^0 T^0 = 1 \tag{6-12}$$

și procedând la identificarea exponenților, rezultă valorile acestora:

$a_{11} = 1,\ a_{21} = 2,\ a_{31} = 2,\ a_{12} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{32} = 1,\ a_{13} = 0,\ a_{23} = 1,\ a_{33} = -1,\ a_{14} = 0,$
$a_{24} = 2,\ a_{34} = -1$. (6-13)

Rezultă, în acest fel, complexele adimensionale

$$\pi_F = \frac{F}{\rho \cdot u^2 \cdot D^2}\ ,\quad \pi_\mu = \frac{\mu}{\rho \cdot u \cdot D} = \frac{\vartheta}{u \cdot D}\ ,\quad \pi_n = \frac{n \cdot D}{u},\ \pi_g = \frac{g \cdot D}{u^2} \tag{6-14}$$

și, în final, forma structurală a relației forței cu care vântul acționează asupra rotorului turbinei eoliene

$$F = \varphi(\frac{\mu}{\rho \cdot u \cdot D}, \frac{n \cdot D}{u}, \frac{g \cdot D}{u^2}) \cdot g \cdot u^2 \cdot D^2\ . \tag{6-15}$$

Funcția $\varphi(\frac{1}{Re}, \frac{n \cdot D}{u}, \frac{1}{Fr})$ se determină experimental.

B. ELEMENTE DE SIMILITUDINE

7. SIMILITUDINEA HIDRAULICĂ
8. TEOREMELE SIMILITUDINII
9. SIMILITUDINEA GEOMETRICĂ, CINEMATICĂ ȘI DINAMICĂ
10. METODA TEOREMEI π A ANALIZEI DIMENSIONALE
11. METODA FORȚELOR
12. METODA PUNERII SUB FORMĂ ADIMENSIONALĂ A ECUAŢIILOR PROBLEMĂ

7. SIMILITUDINEA HIDRAULICĂ

Complexitatea fenomenelor hidraulice şi dificultăţile matematice ce apar la rezolvarea ecuaţiilor care descriu fenomenele respective conduc la folosirea, în majoritatea cazurilor, a metodelor experimentale de cercetare. Determinările experimentale pot fi efectuate fie direct pe prototip (la scară naturală), fie pe modele (la scară redusă). De obicei, măsurătorile realizate pentru fenomenul la scară naturală nu sânt posibile şi atunci este necesar să se facă experimentări pe modele reduse, în condiții de laborator.

Împreună cu analiza dimensională, *similitudinea hidraulică* constituie baza teoretică a metodei de studiu prin cercetări experimentale efectuate pe modele în condiții de laborator.

Teoriile similitudinii şi modelării stabilesc condiţiile ce trebuie respectate pentru ca fenomenul de pe model să fie similar fenomenului din natură (fenomenului real). Aceste teorii fac posibilă studierea în laborator, pe modele, a fenomenelor din natură, precizând şi modul în care rezultatele obţinute pe model pot fi extinse la scară naturală sau la alte fenomene asemenea făcând parte din aceeaşi clasă.

Experimentările pe modele, în laborator, au avantajul că sunt mai comode, mai puţin costisitoare şi pot acoperi o gamă foarte mare de variante, în raport cu experimentările direct pe prototip. În acelaşi timp, este necesar ca acest prototip să existe, lucru care nu totdeauna este posibil. Testările pe model dau elemente preţioase privind proiectarea, execuţia şi funcţionarea prototipului, permiţând ca din studiul variantelor să se adopte soluţia optimă.

Similitudinea hidraulică permite deci trecerea de la studiul unui fenomen la studiul altui fenomen de aceeaşi natură, fenomenele respective fiind similare.

Se consideră un fenomen hidraulic care poate fi descris cu ajutorul a *n* mărimi fizice, mărimi ce se grupează pe specii; fie un multiplicator diferit de zero şi de infinit, numit scară, ataşat fiecărei specii în parte. Aceste scări se aleg astfel încât prin multiplicarea tuturor mărimilor ce caracterizează fenomenul respectiv, se obţin mărimi ce caracterizează alt fenomen de aceeaşi natură cu primul. *Trecerea unui* *fenomen la alt fenomen prin astfel de transformări poartă numele de similitudine fizică. Prin similitudine, două sau mai multe fenomene de aceeaşi natură sunt puse în corespondenţă, astfel încât înmulţind valorile mărimilor ce caracterizează un fenomen prin factori reali şi pozitivi, să se obţină valorile mărimilor corespondente ce caracterizează alt fenomen*.

Trecerea de la o mărime ce caracterizează un fenomen de pe model, X_M, la mărimea omoloagă a unui alt fenomen similar la scară naturală, X_N, se poate scrie cu ajutorul scării mărimii fizice respective, S_X, în modul următor:

$$X_M = S_X X_N. \tag{7-1}$$

Între scări există relaţii de dependenţă asemănătoare relaţiilor dimensionale cum ar fi, spre exemplu, scara vitezelor:

$$S_u = \frac{u_M}{u_N} = \frac{{}^{l_M}/_{t_M}}{{}^{l_N}/_{t_N}} = \frac{{}^{l_M}/_{l_N}}{{}^{t_M}/_{t_N}} = \frac{S_l}{S_t} \tag{7-2}$$

sau scara forţelor:

$$S_F = \frac{F_M}{F_N} = \frac{m_M a_M}{m_N a_N} = \frac{\left({}^{m_M}/_{m_N}\right)\left({}^{l_M}/_{l_N}\right)}{\left({}^{t_M}/_{t_N}\right)^2} = \frac{S_m S_l}{{S_t}^2} \tag{7-3}$$

în care l, t, m, u, a, F, reprezintă lungime, timp, masă, viteză, acceleraţie şi respectiv forţă, iar S_l, S_t, S_m, S_u, S_F reprezintă scările lungimilor, timpilor, maselor, vitezelor şi respectiv forţelor.

Indicii M şi N se referă la cele două fenomene similare (fenomenul M de pe model şi fenomenul N din natură).

8. TEOREMELE SIMILITUDINII

Teoria similitudinii hidraulice asigură baza teoretică pentru metoda modelării hidraulice. Teoria similitudinii împreună cu analiza dimensională se utilizează la interpretarea și generalizarea rezultatelor cercetărilor experimentale de hidraulică.

Două fenomene, M *(fenomenul de pe model) și* N *(fenomenul din natură) sunt similare dacă fac parte din aceeași clasă de fenomene și dacă între mărimile omoloage cu care se descriu aceste fenomene există relații de proporționalitate de tipul*

$$S_x = \frac{x_M}{x_N} \tag{8-1}$$

în care S_x *este scara mărimilor omoloage de dimensiunea* $[x]$*, iar* x *este o mărime cu care se descrie fenomenul, indicele* M *referindu-se la fenomenul de pe model, iar indicele* N *la fenomenul similar din natură.*

Teorema I a similitudinii stabileşte condiţiile necesare de similitudine şi are următorul enunţ: *la un grup de fenomene similare, toate complexele adimensionale scrise cu mărimile omoloage sunt identice (*π*=idem.)*.

Stabilirea condiţiilor de similitudine, adică stabilirea complexelor adimensionale ce apar identice la o clasă de fenomene asemenea, se poate realiza prin mai multe metode cum ar fi metoda teoremei π a analizei dimensionale, metoda forţelor și metoda punerii sub formă adimensională a ecuaţiilor ce descriu fenomenele.

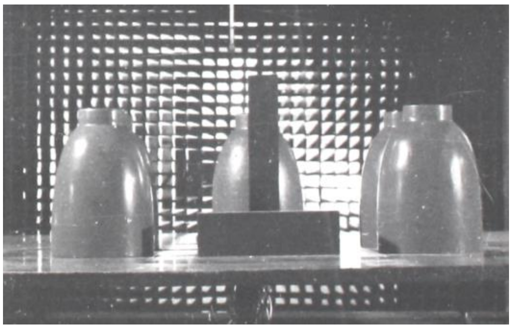
Teorema a II-a a similitudinii arată că *pentru ca un fenomen* M *să fie similar cu un fenomen determinat* N, *trebuie ca ambele fenomene să fie de aceeaşi natură şi să aibă criteriile determinante identice.*

Criteriile determinante sunt complexele adimensionale formate cu mărimile determinante ale fenomenului, adică cu acele mărimi care determină univoc desfăşurarea fenomenului concret.

Precizarea mărimilor determinante este de o mare importanţă datorită faptului că soluţia unui sistem de ecuaţii, ce descrie fenomenul, este determinată de mărimile care intră în exprimarea condițiilor de unicitate. Aceste mărimi determinante pot fi: *mărimi geometrice* (lungimi caracteristice, suprafeţe caracteristice), *mărimi caracteristice ale corpurilor* (densitate, viscozitate, modul de elasticitate), *mărimi ce caracterizează câmpul de forţe masice* (forţe de greutate, centrifuge, deviatoare), *mărimi caracteristice mişcării* (viteză, presiune).

Cu ajutorul acestor mărimi determinante se formează complexele adimensionale determinante pentru care se pune *condiţia de similitudine* π=idem. ($\pi_M = \pi_N$).

În figura 8.1 sunt prezentate două fenomene similare și anume: acțiunea curentului de aer din vena experimentală a tunelului aerodinamic cu strat limită aferent Laboratorului de Aerodinamică și Ingineria Vântului din Universitatea Tehnică de Construcții București (TASL1-LAIV-UTCB) asupra modelului la scară redusă (M) a unei bateri de rezervoare de fermentare a nămolului (model baterie RFN) (fig. 8.1,a) și acțiunea vântului natural asupra bateriei de rezervoare de fermentare a nămolului la scară naturală (N) (bateria de RFN aferentă stației de epurare a Municipiului București) (fig. 8.1,b). În acest caz, criteriul determinant este criteriul Reynolds, iar condiția de similitudine va fi Re=idem. (Re_M=Re_N).



a

b

Fig. 8.1. a – Modelul cu răspuns static 1:100 (M) al unei bateri de rezervoare de fermentare a nămolului (model baterie RFN) în vena experimentală a tunelului aerodinamic TASL1-LAIV-UTCB; **b** – Bateria de RFN a stației de epurare a Municipiului București la scară naturală (N)

9. SIMILITUDINEA GEOMETRICĂ, CINEMATICĂ ȘI DINAMICĂ

Asigurarea similitudinii a două fenomene presupune realizarea celor trei forme de similitudine şi anume similitudinea geometrică, cinematică şi dinamică.

a. Similitudinea geometrică este cea mai simplă formă de similitudine. *Între fenomenul pe model (M) şi fenomenul pe prototip (N) există o similitudine geometrică dacă este asigurată proporţionalitatea lungimilor omoloage şi egalitatea unghiurilor.* Unui punct pe model îi corespunde un singur punct pe prototip şi reciproc, cele două puncte dispuse identic pe model şi prototip purtând numele de puncte omoloage. Aceste puncte omoloage pot determina drepte omoloage, suprafeţe omoloage şi volume omoloage. Prin urmare, similitudinea geometrică presupune o scară unică pentru lungimi.

$$S_l = \frac{l_M}{l_N}. \tag{9-1}$$

Similitudinea geometrică poate fi asigurată prin realizarea modelului la scară, nedistorsionat geometric.

b. Similitudinea cinematică reprezintă similitudinea mişcării. *Dacă se consideră sistemele în mişcare ca fiind alcătuite din particule, mişcarea sistemelor va fi similară dacă particulele omoloage ocupă puncte omoloage la timpi omologi*. Timpii omologi sunt timpii în care se produc aceleaşi fracţiuni din fenomenul studiat atât pe model cât şi pe prototip.

Se poate demonstra că, în cazul mişcărilor similare, vectorii viteză şi acceleraţie locală ataşaţi punctelor omoloage au mărimi şi direcţii omoloage la timpi omologi, de unde rezultă că liniile de curent sunt curbe omoloage, între acestea existând similitudine geometrică (aspectul curgerii este acelaşi pe model şi prototip).

Prin urmare, în cazul în care similitudinea cinematică este asigurată, există între cele doua fenomene o scară a lungimilor şi o scară a vitezelor, scări constante pentru aceste fenomene:

$$S_l = \frac{l_M}{l_N}; S_u = \frac{u_M}{u_N} \quad . \tag{9-2}$$

Dacă se exprimă viteza în funcţie de lungime şi timp, rezultă că şi scara timpilor este de asemenea, constantă :

$$S_t = \frac{t_M}{t_N} \quad . \tag{9-3}$$

La un fenomen nepermanent periodic, scara timpilor este raportul perioadelor fenomenelor asemenea. În cazul mişcării permanente, scara timpilor reprezintă raportul între două intervale de timp, din timpul de desfăşurare a fenomenelor pe model şi prototip, în care particule omoloage descriu porţiuni omoloage din traiectoriile lor.

Datorită faptului că dimensiunile mărimilor cinematice se exprimă cu ajutorul dimensiunilor mărimilor fundamentale (L pentru lungime şi T pentru timp), scările tuturor mărimilor cinematice (viteza *u*, acceleraţia *a*, debitul volumic *q*) se exprimă cu ajutorul scărilor fundamentale după cum urmează:

$$S_u = \frac{u_M}{u_N} = \frac{l_M / t_M}{l_N / t_N} = \frac{l_M}{l_N} \cdot \frac{t_N}{t_M} = S_l S_t^{-1} \tag{9-4}$$

$$S_a = \frac{a_M}{a_N} = \frac{u_M / t_M}{u_N / t_N} = \frac{u_M}{u_N} \cdot \frac{t_N}{t_M} = S_u S_t^{-1} = S_l S_t^{-2} \tag{9-5}$$

$$S_q = \frac{q_M}{q_N} = S_l^{\,3} S_t^{-1} \quad . \tag{9-6}$$