Exercices et Problèmes

de

Thermomécanique

et

comportement des matériaux

Alain GERARD, Céline GERARD, Claudiu BISU,

Olivier CAHUC, Miron ZAPCIU

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
Exercices et problèmes de thermomécanique et comportement des matériaux / Alain Gerard, Céline Gerard, Claudiu Bisu, ... –
București : Editura Academiei Oamenilor de Ştiinţă din România, 2014
ISBN 978-606-8371-96-2

I. Gerard, Alain
II. Gerard, Céline
III. Bisu, Claudiu

536

Exercices et Problèmes

de

Thermomécanique

et

comportement des matériaux

A. GERARD[1A], C. GERARD[2B], C. BISU[3C], O. CAHUC[1D], M. ZAPCIU[3E],

[1]Université de Bordeaux - CNRS UMR 5295, I2MI Département MPI, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France.
[A]Prof., Dr, e-mail: alain.gerard@u-bordeaux.fr [D]Prof., Dr, e-mail: olivier.cahuc@u-bordeaux.fr
[2]Institut Pprime – UPR3346, CNRS – Université de Poitiers – ISAE-ENSMA, Département de Physique et Mécanique des Matériaux, BP 30179, F86961 Futuroscope Chassneuil Cedex France.
[B]Dr., Eng., email : celine.gerard@ensma.fr
[3]University POLITEHNICA of Bucharest, Department MSP, 313 Splaiul Independentei, 060042, Bucharest, Romania.
[C]Dr, Eng. Lecturer, e-mail: claudiu.bisu@upb.ro [E]Prof., Dr, Eng., e-mail: miron.zapciu@upb.ro

Avant – propos

Ce recueil s'adresse en priorité aux étudiants de l'enseignement supérieur s'intéressant au domaine de la mécanique. Il est particulièrement destiné aux étudiants de Master Recherche (Master 2ème année), dernière année d'école d'ingénieurs, chercheurs et plus généralement à tous ceux qui souhaitent approfondir leur maîtrise des lois de comportement des matériaux et leur utilisation.

Ce livre n'est pas un catalogue d'exercices et de problèmes « classiques » avec solutions, bien que certains des textes choisis soient des épreuves d'examen de Master, d'Ecoles d'ingénieurs (dernière année) ou bien de concours. Son but est surtout de faire comprendre au lecteur comment aborder une modélisation et comment traiter un problème. On donne donc des énoncés et des solutions détaillées, en s'affranchissant des calculs ennuyeux qui rebutent parfois le lecteur s'il n'est pas accompagné.

Sur le plan pratique, le lecteur sera conduit par les textes proposés, à s'exercer aux mathématiques appliquées (indices muets et francs, calcul vectoriel, résolution d'équations différentielles et aux dérivées partielles, calcul d'intégrales multiples, de transformée de Laplace-Carson et retour à l'original…). D'usage courant en mécanique des milieux continus, la notion d'indices muets et francs (ou notation d'Einstein) est rappelée et fait l'objet d'exercices. Ce chapitre est suivi de la notion de puissance virtuelle qui permet de formuler aisément les équations de mouvement et les conditions aux limites d'un problème donné. Puis vient en troisième lieu la thermomécanique et la notion de loi de comportement. Ce chapitre clef est suivi du classique comportement élastique et thermo-élastique avant de se pencher sur la viscoélasticité. La variable temps est alors partie prenante dans ce comportement où les premières non-linéarités de comportement dues aux effets du temps apparaissent. L'ensemble se termine par les comportements, plastique, élasto-plastique, viscoplastique et plus généralement les couplages de comportements allant jusqu'à la prise en compte de l'endommagement au sens de la microfissuration de l'élément de volume des milieux continus.

Toutefois, le lecteur qui souhaiterait approfondir ces connaissances pourra se reporter avec profit au cours de référence[1]. Les chapitres sont précédés d'un résumé des connaissances nécessaires pour aborder les questions développées. Ainsi ce recueil est-il rendu autonome.

Les auteurs recevrons volontiers les critiques et suggestions des utilisateurs, étudiants ou enseignants. Malgré le soin apporté à la rédaction et à la relecture de l'épreuve, des erreurs de calculs peuvent malheureusement s'être glissées. Nous serons reconnaissant aux lecteurs indulgents et à ceux qui voudront bien nous les signaler.

Si ce recueil aide le lecteur à aimer et à dominer la thermomécanique des milieux continus nous en serons récompensés.

Les auteurs

[1] Thermomécanique et modélisation du comportement des matériaux par

Alain GERARD, Céline GERARD, Olivier CAHUC, Miron ZAPCIU, Claudiu BISU

Editura Academiei Oamenilor de Stiinta din România, 2012

ISBN-978-606-8371-19-1

TABLE DES MATIÈRES

Avant – propos **3**

TABLE DES MATIÈRES **5**

1. Convention de sommation : indices muets et indices francs **9**
Rappels **9**
Indice franc, indice muet 9
Dérivées partielles 10
Symbole ε_{ijk} 10
Produit vectoriel 11
Produit mixte 11
Exemples simples d'utilisation de la convention d'Einstein 11
Exercices **12**
Problèmes **25**

2. Puissances virtuelles **31**
Rappels **31**
Définitions 31
Définition 1 31
Définition 2 31
Définition 3 32
Définition 4 32
Champ des vitesses virtuelles 32
Enoncé du principe des puissances virtuelles **33**
Exercices **35**
Problèmes **51**

3. Thermomécanique : lois d'état **66**
Rappels de thermodynamique **66**
Variables d'état 66
Variables observables 66
Variables internes 66
Quelques définitions 66
Température 66
Chaleur 66
Système isolé 67
Etat stationnaire 67
Equilibre thermodynamique 67
Evolution réversible 67
Coefficients thermo-élastiques 67

Relations reliant les coefficients thermo-élastiques 67
Premier principe 67
Rappel sur le premier principe de la thermodynamique en variations finies 69
Bilan d'énergie 70
Energie interne 70
Echange d'énergie par la chaleur 70
Bilan énergétique 71
Deuxième principe : l'entropie 71
Potentiel d'énergie libre 72
Inégalité de Clausius-Duhem 72
Bilans particuliers 72
Evolutions réversibles 73
Lois d'état 74
Hypothèse de l'état local 74
Lois d'état 74
Variables associées 75
Dissipation : Lois complémentaires 75
Dissipation 76
Dissipation intrinsèque 76
Dissipation thermique 76
Potentiel de dissipation 77
Transformation de Legendre-Fenchel 77
Hypothèses simplificatrices 78
Découplage des dissipations intrinsèque et thermique 79
Eléments de thermique 79
Loi de Fourier 79
Equation de la chaleur 80
Propagation de la chaleur 81
Echauffement adiabatique 81
Exercices de thermiques 82
Exercices sur les lois d'état 89
Problèmes 106

4. Elasticité – Thermo-élasticité 129
Rappels 129
Variables d'état 129
Elasticité 129
Elasticité classique 130
Thermo-élasticité classique 131
Cas du comportement adiabatique 132
Exercices 132
Problèmes 150

5. Viscoélasticité 173
Rappels 173
Généralités 173

Viscoélasticité linéaire isotrope 175
Exercices 176
Problèmes 179

6. Plasticité, élasto-plasticité 221
Rappels 221
Généralités 221
Types de comportement plastique 221
Solide rigide parfaitement plastique 221
Solide élasto-plastique parfaitement plastique 221
Solide rigide plastique à écrouissage linéaire 222
Solide élasto-plastique à écrouissage linéaire 222
Plasticité parfaite tridimensionnelle 223
Espace des contraintes, notion de seuil 223
Formulation de la loi de comportement 223
Fonctions seuil 226
Hypothèse de l'incompressibilité plastique 226
Fonctions seuils usuelles 226
Cas rigide plastique 228
Milieux viscoplastiques 228
Elasto-plasticité 230
Schématisation 230
Ecrouissage isotrope 230
Ecrouissage cinématique 230
Loi de comportement 230
Variables et hypothèses 230
Loi d'état 231
Ecrouissage isotrope avec seuil de Von Mises 233
Théorie de Hencky ou de chargement radial 235
Modèle standard à seuil d'écrouissage de Von Mises 236
Cas de l'écrouissage isotrope 236
Cas d'un écrouissage cinématique avec seuil de Von Mises 237
Exercices 237
Problèmes 244

1. Convention de sommation : indices muets et indices francs

Rappels

Soit une base $\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3$ (ou $\vec{k}_i$; i = 1, 2, 3) orthonormée directe. Cela signifie que $\vec{k}_i \vec{k}_j = \delta_{ij}$ (δ_{ij} = 0, si $i \neq j$, δ_{ij} = 1, si $i = j$); δ_{ij} est le symbole de Kronecker, c'est aussi l'élément de la matrice unité.

Indice franc, indice muet

Ayant fait choix d'une base orthonormée dans l'espace à trois dimensions E, il est possible d'écrire tout vecteur $\vec{A}$ de E sous la forme :

$$\vec{A} = A_1\vec{k}_1 + A_2\vec{k}_2 + A_3\vec{k}_3 \equiv A_i k_i \quad (1),$$

A_i sont les composantes de $\vec{A}$ dans la base $\vec{k}_i$, A_i est la i$^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{A}$. Dans ce cas **i est un indice muet. Un indice non muet est un indice franc** ; il ne peut apparaître qu'une seule fois dans un même monôme. Ainsi dans la formule :

$$A_i = B_{ij}C_j$$

i est un indice **franc** alors que ***j*** est un indice **muet.** Il faut toujours prendre soin de désigner un indice muet par une lettre différente de celles utilisées pour des indices francs. Evidemment deux indices muets intervenant dans un même monôme doivent nécessairement être désignés par deux lettres différentes et différentes également des lettres utilisées pour les indices francs comme dans :

$$A_i = P_{ij}Q_{jk}C_k \quad (2).$$

Tout indice littéral répété deux fois dans un même monôme signifie que ce monôme doit être remplacé par la somme des trois termes obtenus en donnant à cet indice successivement les valeurs 1, 2 3 (cf. la relation (1)).

Les lettres qui représentent des indices muets n'ont donc aucune importance de sorte qu'il est toujours possible de changer ces lettres sans changer le sens d'une expression. Ainsi peuvent être échangés les indices j en l et k en m dans l'expression (2) qui devient : $A_i = P_{il} Q_{lm} C_m$ et garde la même signification (sommation sur l et sur m). En revanche l'indice i de part et d'autre de l'égalité ne doit pas être modifié.

La convention de l'indice muet est dite aussi convention d'Einstein.

Dérivées partielles

Soient les variables indépendantes x_1, x_2, x_3, t la notion de dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, notée également $f_{,i}$, est la i[ème] composante du gradient de f qui est parfois notée $\partial_i f$ ou $\nabla_i f$. Ainsi le gradient du champ des déplacements $\vec{u}$ de composante u_i est noté $u_{i,j}$. Le gradient associé à une fonction scalaire f est définit par : $\overrightarrow{grad} f = f_{,i}.\vec{k}_i$.

La divergence d'un vecteur $\vec{u}(\vec{x},t)$ se note : $div\vec{u} = u_{i,i}$.

Symbole ε_{ijk}

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1; \text{si} & i,j,k \quad \text{permutation paire de } 1,2,3 \quad \varepsilon_{123},\ldots \\ -1; \text{si} & i,j,k \quad \text{permutation impaire de } 1,2,3 \quad \varepsilon_{213},\ldots \\ 0; \text{si} & i,j,k \quad \text{n'est pas une permutation de } 1,2,3 \quad \varepsilon_{113},\ldots \end{cases}.$$

Le rotationnel d'un vecteur $\vec{u}(\vec{x},t)$ s'écrit : $\overrightarrow{rot}\left[\vec{u}(\vec{x},t)\right] = \varepsilon_{ijk} u_{k,j} \vec{k}_i$. La i[ème] composante du rotationnel s'écrit $\overrightarrow{rot}\left[\vec{u}(\vec{x},t)\right]_i = \varepsilon_{ijk} u_{k,j}$.

Produit vectoriel

La i[ème] composante du produit vectoriel de $\vec{a}$ par $\vec{b}$ s'écrit : $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)_i = \varepsilon_{ipq} a_p b_q$.

La i[ème] composante du double produit vectoriel $\left[\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right]$ s'écrit :

$\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)_q = \varepsilon_{qlm} b_l c_m$ et $\left[\vec{a} \wedge \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right]_i = \varepsilon_{ipq} a_p \varepsilon_{qlm} b_l c_m = \varepsilon_{ipq} \varepsilon_{qlm} a_p b_l c_m$.

Produit mixte

$\left[\vec{a}.\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right] = \varepsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

Exemples simples d'utilisation de la convention d'Einstein

$\delta_{ii} = 3$, $\delta_{ip}\delta_{ip} = 3$ (car δ_{ip} est non nul si $i = p$) ;

$\delta_{ip} v_p = \delta_{i1} v_1 + \delta_{i2} v_2 + \delta_{i3} v_3 = v_i$, $\delta_{ip}\delta_{pq}\delta_{qr}\delta_{rj} = \delta_{ij}$;

$\delta_{pq} u_p w_q = 3\vec{u}.\vec{w}$;

$\varepsilon_{ijk}\delta_{ip}\delta_{jq}\delta_{kr} = \varepsilon_{pqr}$ (car δ_{ip} est non nul si $i = p$, δ_{jq} est non nul si $j = q$, δ_{kr} est non nul si $k = r$) ; ce qui peut aussi s'écrire : ε_{ijk}

$\delta_{ij} T_{ij} = T_{ii}$ (la trace de $\underline{\underline{T}}$) ;

$\varepsilon_{mjk}\varepsilon_{mqr} = \delta_{jq}\delta_{kr} - \delta_{jr}\delta_{kq}$ (sommation sur un indice);

$\varepsilon_{mnk}\varepsilon_{mnr} = 2\delta_{kr}$ (sommation sur deux indices);

$\varepsilon_{mnr}\varepsilon_{mnr} = 6$ (sommation sur trois indices);

Exercices

Exercice 1

Soit la matrice $\left[A\right]$ d'éléments a_{ij} établir la relation : $\varepsilon_{ijk} d\acute{e}t\left[A\right] = \varepsilon_{pqr} a_{pi} a_{qj} a_{rk}$.

Solution

$$d\acute{e}t\left[A\right] = \vec{a}.\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right) = \begin{array}{ccc} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \hline a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ \hline a_{i1} & a_{p2} & a_{q3} \end{array}, \quad \left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)_i = \varepsilon_{ipq} a_{p2} a_{q3},$$

$\left[\vec{a}.\left(\vec{b} \wedge \vec{c}\right)\right] = \varepsilon_{ipq} a_{i1} a_{p2} a_{q3} = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$ (car p et q sont des indices muets changeables en j et k) d'où :

$d\acute{e}t\left[A\right] = \varepsilon_{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}$, ou encore $\varepsilon_{ijk} d\acute{e}t\left[A\right] = \varepsilon_{pqr} a_{pi} a_{qj} a_{rk}$.

Nous remarquons que : $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} d\acute{e}t\left[A\right] = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}$, mais $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ijk} = 6$ donc :

$$d\acute{e}t\left[A\right] = \frac{1}{6} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}.$$

Exercice 2

Démontrer à l'aide de la convention d'Einstein que :

$\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{A}\right) - \Delta\vec{A}$.

Solution

$\left(\overrightarrow{rot}\left[\vec{A}\right]\right)_i = \varepsilon_{ijk} A_{k,j} = B_i$, $\left(\overrightarrow{rot}\left[\vec{B}\right]\right)_l = \varepsilon_{lmi} B_{i,m} = \varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk} A_{k,jm}$. Par ailleurs, nous avons vu que : $\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk} = \delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}$ (nous avons mis l'indice muet en tête et fait une permutation circulaire) d'où :
$\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk} A_{k,jm} = \left(\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}\right) A_{k,jm} = \delta_{lj}\delta_{mk} A_{k,jm} - \delta_{lk}\delta_{mj} A_{k,jm}$; l'indice muet prend la valeur de l'indice franc d'où il vient : $\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk} A_{k,jm} = A_{k,lk} - A_{l,jj}$ $\Rightarrow$
$\left[\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{A}\right)\right]_l = A_{k,lk} - A_{l,jj} = \left(div\left[\vec{A}\right]\right)_{,l} - \Delta A_l$; d'où la relation proposée.

Exercice 3

Démontrer que :

- $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right) = 0$,
- $div\left(f\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}(f).\vec{A} + f div\left(\vec{A}\right)$,
- $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad} f\right) = 0$,
- $\overrightarrow{rot}\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{A} div\vec{B} - \vec{B} div\vec{A} + \left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}.grad\right)\vec{B}$,
- $div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right) = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\vec{A} - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\vec{B}$,
- $\overrightarrow{grad}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{B} + \left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A} + \vec{A} \wedge \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right) + \vec{B} \wedge \overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)$.

Solution

- $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right)_i = \left(\varepsilon_{ijk} A_{k,j}\right)_{,i} = \varepsilon_{ijk} A_{k,ji}$ or $A_{k,ji} = A_{k,ij}$ relation symétrique et sommation sur i et sur j d'où : $div\left(\overrightarrow{rot}(\vec{A})\right)_i = 0$.

- $div\left(f\vec{A}\right) = \left(fA_l\right)_{,l} = f_{,l}A_l + fA_{l,l}$ d'où : $div\left(f\vec{A}\right) = \overrightarrow{grad}(f).\vec{A} + fdiv\left(\vec{A}\right)$.

- $\left(\overrightarrow{grad}f\right)_i = f_{,i} = B_i$ et $\overrightarrow{rot}(u)_i = \varepsilon_{ijk}u_{k,j} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)_l = \varepsilon_{lmi}B_{i,m} = \varepsilon_{lmi}f_{,mi}$ or $f_{,mi}$ est symétrique en m et i, d'où le résultat : $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}f\right) = 0$.

- $\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k = M_i$, $\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{M}\right)\right]_l = \varepsilon_{lmi}M_{i,m} = \varepsilon_{lmi}\varepsilon_{ijk}\left(a_jb_k\right)_{,m}$ et
  $\varepsilon_{ilm}\varepsilon_{ijk} = \delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj} \Rightarrow \left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{M}\right)\right]_l = \left(\delta_{lj}\delta_{mk} - \delta_{lk}\delta_{mj}\right)\left(a_{j,m}b_k + a_jb_{k,m}\right) \Rightarrow$
  $\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{M}\right)\right]_l = a_{l,m}b_m + a_lb_{m,m} - a_{m,m}b_l - a_mb_{l,m} \Rightarrow$
  $\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{M}\right)\right]_l = a_ldiv\vec{B} - b_ldiv\vec{A} + a_{l,m}b_m - a_mb_{l,m}$ or : $\left[\left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{X}\right]_l = A_jX_{l,j}$
  $\Rightarrow a_mb_{l,m} = \left[\left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{B}\right]_l$ et $b_ma_{l,m} = \left[\left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A}\right]_l$, d'où le résultat demandé.

- $\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)_i = \varepsilon_{ijk}a_jb_k = M_i$, $div\left(\vec{M}\right) = M_{l,l} = \varepsilon_{ijk}\left(a_jb_k\right)_{,i}$, $\left(a_jb_k\right)_{,i} = a_{j,i}b_k + a_jb_{k,i}$
  $\Rightarrow \left[div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)\right] = \varepsilon_{ijk}a_{j,i}b_k + \varepsilon_{ijk}a_jb_{k,i}$. Nous avons aussi :
  $\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right]_k = \varepsilon_{ijk}a_{j,i} = \varepsilon_{kij}a_{j,i}$, $\left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right]_j = \varepsilon_{ijk}b_{k,i} = -\varepsilon_{jik}b_{k,i}$ d'où :
  $\left[div\left(\vec{A} \wedge \vec{B}\right)\right] = \left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right)\right]_k b_k - \left[\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right]_j a_j = \vec{B}.\overrightarrow{rot}\left(\vec{A}\right) - \vec{A}.\overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)$.

- $\left[\overrightarrow{grad}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\right]_j = \left(A_iB_i\right)_{,j} = A_{i,j}B_i + B_{i,j}A_i$,
  $\left[\vec{A} \wedge \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right]_i = \varepsilon_{ijk}A_j\varepsilon_{kpq}B_{q,p} = \left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\right)A_jB_{q,p} \Rightarrow$
  $\left[\vec{A} \wedge \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)\right]_i = A_j\left(B_{j,i} - B_{i,j}\right)$. Il est aussi possible d'écrire de ce qui précède:
  $\left[\overrightarrow{grad}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\right]_i = A_{j,i}B_j + A_jB_{j,i} = A_jB_{i,j} + B_jA_{i,j} + A_j\left(B_{j,i} - B_{i,j}\right) + B_j\left(A_{j,i} - A_{i,j}\right)$,
  comme $A_jB_{i,j} = \left[\left(\vec{A}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{B}\right]_i$ et $B_jA_{i,j} = \left[\left(\vec{B}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{A}\right]_i$ le résultat est établi.

Exercice 4

Soit l'équation donnant les valeurs propres du déviateur des contraintes Σ^D :
$x^3 - ax + b = 0$ (1).

1°) Donner une interprétation du coefficient a (a>0).

2°) Si $x = k\cos\alpha$, montrer qu'il est possible de choisir *k* tel que (1) $\Leftrightarrow$ $\cos 3\alpha = K$.

3°) Déterminer *k* et *K* ($K < 1$).

Solution

La mise en évidence des invariants d'un tenseur $\underline{\underline{L}}$ peut se faire par l'intermédiaire du polynôme caractéristique ou relation de Cayley-Hamilton :

$-\lambda^3 + L_I\lambda^2 - L_{II}\lambda + L_{III} = 0$ avec :

$L_I = L_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \delta_{ij}L_{ij}$ (1$^{\text{er}}$ invariant),

$L_{II} = \dfrac{1}{2}\left(L_{ii}L_{jj} - L_{ij}L_{ji}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}\right)L_{ip}L_{jq}$ (2$^{\text{ème}}$ invariant),

$L_{III} = d\acute{e}t\left(\underline{\underline{L}}\right) = \dfrac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}L_{ip}L_{jq}L_{kr}$ (3$^{\text{ème}}$ invariant).

Par ailleurs λ est valeur propre de $\underline{\underline{L}}$ si λ est racine de l'équation :

$d\acute{e}t\left(L_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right) = 0$ (2). Comme $\underline{\underline{\Sigma}}^D = \begin{vmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{vmatrix}$, (2) $\Leftrightarrow$

$-\lambda^3 - \lambda\left(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{12}^2\right) + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} = 0$ donc : $a = \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{12}^2 = I_2 > 0$

{deuxième invariant de $\underline{\underline{\Sigma}}^D$, $I_2 = \dfrac{1}{2}\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ij}\right)$ },

$b = 2\sigma_{12}\sigma_{13}\sigma_{23} = I_3$ {troisième invariant de $\underline{\underline{\Sigma}}^D$, $I_3 = d\acute{e}t\left(s_{ij}\right)$ }.

2°) Avec $x = k\cos\alpha$, il vient (1) $\Leftrightarrow$ $k^3\cos^3\alpha - ak\cos\alpha + b = 0$, or

$4\cos^3\alpha = 3\cos\alpha + \cos 3\alpha$ $\Rightarrow$ $\dfrac{k^3}{4}\cos 3\alpha + k\cos\alpha\left[\dfrac{3k^2}{4} - a\right] + b = 0$, le deuxième

terme est nul si : $a = \dfrac{3k^2}{4} = I_2$ $\Rightarrow$ $\cos 3\alpha = -\dfrac{4b}{k^3}$ (3).

3°) (3) $\Rightarrow$ $k = 2\sqrt{\dfrac{I_2}{3}}$ et $K = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{I_3}{\left(I_2\right)^{3/2}} = \cos 3\alpha \le 1$.

Exercice 5

Soient $\underline{\underline{L}}$ et $\underline{\underline{C}}$ deux tenseurs d'ordre deux, symétriques, liés par la relation $\underline{\underline{L}} = \dfrac{1}{2}\left(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}}\right)$ [$\underline{\underline{1}}$ tenseur unité d'ordre deux].

Déterminer les invariants de $\underline{\underline{L}}$ en fonction de ceux de $\underline{\underline{C}}$ et réciproquement.

Rappelons que les trois invariants d'un tenseur $\underline{\underline{T}}$ d'ordre deux sont : $T_I = T_{ii}$, $T_{II} = \dfrac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right)$, $T_{III} = d\acute{e}t\left(\underline{\underline{T}}\right)$.

Solution

Nous avons : $L_{ij} = \dfrac{1}{2}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right)$, donc $L_I = L_{ii} = \dfrac{1}{2}\left(C_{ii} - \delta_{ii}\right) = \dfrac{1}{2}\left(C_1 - 3\right)$.

De même : $L_{II} = \dfrac{1}{2}\left(L_{ii}L_{jj} - L_{ij}L_{ji}\right) = \dfrac{1}{8}\left[\left(C_I - 3\right)^2 - C_{ij}C_{ij} + \delta_{ij}\delta_{ij} - 2\delta_{ij}C_{ij}\right]$. Or $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{ii} = 3$ et $2\delta_{ij}C_{ij} = 2C_{ii} = 2C_I$. Il en résulte que :

$$L_{II} = \frac{1}{8}\left[\left(C_I - 3\right)^2 - \left(C_I^2 - 2C_{II} + 3 - 2C_I\right)\right] \Rightarrow L_{II} = \frac{1}{4}\left[3 - 2C_I + C_{II}\right].$$

$L_{III} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}L_{ip}L_{jq}L_{kr}$, $L_{III} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\left[\frac{1}{8}\left(C_{ip}-\delta_{ip}\right)\left(C_{jq}-\delta_{jq}\right)\left(C_{kr}-\delta_{kr}\right)\right]$, mais

$C_{III} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}C_{ip}C_{jq}C_{kr}$, or $\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\left(\delta_{ip}\delta_{kr}C_{jq}+\delta_{jq}\delta_{kr}C_{ip}+\delta_{ip}\delta_{jq}C_{kr}\right)=M$, avec

$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\delta_{ip}\delta_{kr}C_{jq} = \frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iqk}C_{jq} = \frac{2}{6}\delta_{jq}C_{jq} = \frac{1}{3}C_{ii}$

$\Rightarrow\ M = C_{ii} = C_I$; nous avons de même :

$\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}C_{kr}+\delta_{jq}C_{kr}C_{ip}+\delta_{kr}C_{ip}C_{jq}\right)=3N=C_{II}$ avec $\frac{1}{6}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr}\delta_{ip}C_{jq}C_{kr}=N$

comme : $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{pqr} = \delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq}$, il vient : $N = \frac{1}{6}\left(\delta_{jq}\delta_{kr}-\delta_{jr}\delta_{kq}\right)C_{jq}C_{kr}$

$\Rightarrow N = \frac{1}{6}\left(C_{jj}C_{kk}-C_{jk}C_{kj}\right)$, d'où : $C_{II} = \frac{1}{2}\left(C_{ii}C_{jj}-C_{ij}C_{ji}\right)$. Finalement, il vient :

$L_{III} = \frac{1}{8}\left(C_I + C_{II} + C_{III} - 1\right)$.

Il est aussi possible d'utiliser la relation de Cayley-Hamilton :

$-\lambda^3 + L_I\lambda^2 - L_{II}\lambda + L_{III} = 0$ pour obtenir les résultats ci-dessus.

L'inversion des relations donnant les trois invariants de $\underline{\underline{L}}$ en fonction de ceux de $\underline{\underline{C}}$ conduit à :

$C_I = 2L_I + 3$, $C_{II} = 4L_{II} - 4L_I - 3$, $C_{III} = 8L_{III} - 4L_{II} + 2L_1 + 1$.

Exercice 6

Soient deux tenseurs symétriques d'ordre deux $\underline{\underline{E}}$ et $\underline{\underline{F}}$ d'éléments E_{ij} et F_{ij} liés par la relation :

$$\underline{\underline{2E}} = \left(\underline{\underline{F}}^T.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right) \quad (1)$$

où $\underline{\underline{F}}^T$ désigne le transposé du torseur $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{1}}$ le tenseur unité d'ordre deux. Considérons une fonction scalaire L dépendant du tenseur $\underline{\underline{E}}$ ($L = L(\underline{\underline{E}})$).

Montrer que : $\dfrac{dL}{d\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}\dfrac{dL}{d\underline{\underline{E}}}$.

Solution

$2\underline{\underline{E}} = \left(\underline{\underline{F}}^T.\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right) \Leftrightarrow\; 2E_{pq} = F_{rp}F_{rq} - \delta_{pq}$ (1). Puisque $\underline{\underline{E}}$ est fonction de $\underline{\underline{F}}$ d'après (1) il est toujours possible d'écrire : $\left(\dfrac{d\underline{\underline{L}}}{d\underline{\underline{F}}}\right)_{ij} = \left(\dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial\underline{\underline{F}}}\right)_{ij} = \dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{pq}}\dfrac{\partial E_{pq}}{\partial F_{ij}}$. A présent, considérons une composante F_{ij} de $\underline{\underline{F}}$ avec les indices i et j fixés et calculons $\dfrac{\partial E_{pq}}{\partial F_{ij}}$. Pour que le terme F_{ij} apparaisse dans le membre de droite de (1), il faut que soit p soit q prennent la valeur j. Posons dans (1) successivement $p = i$ et $q = j$ alors il vient : $E_{jq} = \dfrac{1}{2}\left(F_{rj}F_{rq} - \delta_{jq}\right)$ et $E_{pj} = \dfrac{1}{2}\left(F_{rp}F_{rj} - \delta_{pj}\right)$. En ne sommant pas sur l'indice j, il est possible d'écrire : $\dfrac{\partial E_{jq}}{\partial F_{ij}} = \dfrac{1}{2}F_{iq}$, $q \neq j$ et $\dfrac{\partial E_{pj}}{\partial F_{ij}} = \dfrac{1}{2}F_{pi}$, $p \neq j$; en outre $\dfrac{\partial E_{jj}}{\partial F_{ij}} = F_{ij}$ car d'après (1) nous avons $2E_{jj} = \left(F_{rj}F_{rj} - 1\right)$. Il vient alors :

$\dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial F_{ij}} = \dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{jq}}\dfrac{\partial E_{jq}}{\partial F_{ij}} + \dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{pj}}\dfrac{\partial E_{pj}}{\partial F_{ij}} + \dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{jj}}\dfrac{\partial E_{jj}}{\partial F_{ij}}$ où $q \neq j$ dans le premier terme de droite et $p \neq j$ dans le second terme de droite. Des résultats qui précèdent il vient : $\dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial F_{ij}} = \dfrac{1}{2}F_{iq}\dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{jq}} + \dfrac{1}{2}F_{ip}\dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{pj}} + F_{ij}\dfrac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{pp}}$ (2), où $q \neq j$ dans le premier terme de droite et $p \neq j$ dans le second terme de droite.

Limitons nous aux fonctions $\underline{\underline{L}}$ symétriques par rapport aux couples de variables E_{ij} et E_{ji} considérées comme indépendantes (bien qu'elles prennent des valeurs égales compte tenu de la symétrie du tenseur $\underline{\underline{E}}$). Il vient alors :

$$\frac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{ij}} = \frac{\partial\underline{\underline{L}}}{\partial E_{ji}} \text{ avec } i \neq j,$$

nous déduisons de (2) : $\dfrac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial F_{ij}} = F_{ip} \dfrac{\partial \underline{\underline{L}}}{\partial E_{pj}}$ qui se traduit bien en notation intrinsèque par :

$$\frac{d\underline{\underline{L}}}{d\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}} \frac{d\underline{\underline{L}}}{d\underline{\underline{E}}} .$$

Exercice 7

Montrer que si $S_2^{'}$ est l'opposé du second invariant élémentaire du déviateur du tenseur des contraintes de composantes σ_{ij} nous avons :

$$6S_2^{'} = 3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj} .$$

En déduire que :

$$\frac{\partial S_2^{'}}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$$

où s_{ij} désigne les composantes du déviateur du tenseur des contraintes.

Solution

Le deuxième invariant de σ_{ij} est : $\Sigma_2 = \dfrac{1}{2}\left(\sigma_{ii}\sigma_{jj} - \sigma_{ij}\sigma_{ij}\right)$;

de même pour le déviateur nous avons: $S_2 = \dfrac{1}{2}\left(s_{ii}s_{jj} - s_{ij}s_{ij}\right)$ mais $s_{ii} = 0$ puisque s_{ij} est un déviateur. Nous en déduisons : $2S_2^{'} = s_{ij}s_{ij} = \left(\sigma_{ij} - s\delta_{ij}\right)\left(\sigma_{ij} - s\delta_{ij}\right)$ donc :

$$2S_2^{'} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 2s\sigma_{ij}\delta_{ij} + s^2\delta_{ij}\delta_{ij} .$$

Or $\sigma_{ij}\delta_{ij} = 3s$ et $\delta_{ij}\delta_{ij} = 3 \;\Rightarrow\; 2S_2^{'} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 6s^2 + 3s^2 = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 3s^2$, or $s = \dfrac{\sigma_{kk}}{3} \;\Rightarrow$

$2S_2^{'} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - 3\left(\dfrac{\sigma_{ii}}{3}\right)\left(\dfrac{\sigma_{jj}}{3}\right) \;\Leftrightarrow\; 6S_2^{'} = 3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj}$.

Calculons : $\dfrac{\partial S_2^{'}}{\partial \sigma_{ij}}$. Nous écrivons : $6\dfrac{\partial S_2^{'}}{\partial \sigma_{pq}} = 6\sigma_{ij}\delta_{ip}\delta_{jq} - 2\sigma_{ii}\delta_{pq}$, soit :

$$\frac{\partial S_2^{'}}{\partial \sigma_{pq}} = \sigma_{pq} - \frac{\sigma_{ii}}{3}\delta_{pq} = \sigma_{pq} - s\delta_{pq} = s_{pq} \;\Leftrightarrow\; \frac{\partial S_2^{'}}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}.$$

Exercice 8

Montrer que si les forces volumiques f sont nulles, il est possible de former un champ de tenseurs des contraintes $\underline{\underline{\Sigma}}$ vérifiant les équations de l'équilibre à partir d'un champ de tenseurs symétriques χ_{rs} par les relations :

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jqs}\chi_{rs,pq} \quad (1)$$

que nous écrivons symboliquement $\underline{\underline{\Sigma}} = L\left(\underline{\underline{\chi}}\right)$.

Examiner les deux cas particuliers suivants :

a) toutes les composantes de χ_{rs} sont nulles à l'exception de χ_{33} qui est fonction de x_1 et de x_2 seulement. Interprétation du résultat.

b) tous les χ_{rs} sont nulles à l'exception de $\chi_{23} = \chi_{32}$ qui est une fonction de x_1 et de x_2 seulement. Quel problème d'élasticité est-il possible de résoudre ainsi ?

Solution

$\underline{\underline{\Sigma}}$ est symétrique car d'après (1) il vient : $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jqs}\chi_{rs,pq} \Rightarrow \sigma_{ji} = \varepsilon_{jpr}\varepsilon_{iqs}\chi_{rs,pq}$ mais $\chi_{rs,pq} = \chi_{rs,qp}$. Nous avons $\sigma_{ji} = \varepsilon_{jpr}\varepsilon_{iqs}\chi_{rs,qp}$, mais $\chi_{rs} = \chi_{sr}$ par hypothèse $\sigma_{ji} = \varepsilon_{jpr}\varepsilon_{iqs}\chi_{sr,qp} = \sigma_{ij}$ car *p*, *q*, *r*, *s* sont des indices muets.

σ_{ij} défini par (1) vérifie les équations de l'équilibre car $\underline{\underline{\chi}}$ est de classe C^3 (3 fois continument différentiable) donc $\sigma_{ij,j} = \varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jqs}\chi_{rs,pqj} = \varepsilon_{ipr}\varepsilon_{jqs}\chi_{rs,pjq}$ (propriété des dérivées croisées) et comme *j, q* sont des indices muets il est possible de les échanger d'où : $\sigma_{ij,j} = \varepsilon_{ipr}\varepsilon_{qjs}\chi_{rs,pqj} = 0$ car il y a une inversion de *q* et *j* dans le second terme du second membre et ε est antisymétrique ; $\sigma_{ij,j} = 0$ est vérifié.

Cas particuliers :

a) χ_{33} seul élément non nul donc $\chi_{33} = \chi(x_1, x_2) \Rightarrow r = s = 3$, d'où :

$$\sigma_{ij} = \varepsilon_{ip3}\varepsilon_{jq3}\chi_{33,pq}$$

ce qui implique que i et j sont différents de 3 car sinon $\sigma_{ij} = 0$. Il reste donc : $\sigma_{11} = \varepsilon_{1p3}\varepsilon_{1q3}\chi_{33,pq} = 0 + \varepsilon_{123}\varepsilon_{123}\chi_{33,22} + 0 = \chi_{33,22}$, $\sigma_{22} = \varepsilon_{2p3}\varepsilon_{2q3}\chi_{33,pq} = \chi_{33,11}$, $\sigma_{12} = \varepsilon_{1p3}\varepsilon_{2q3}\chi_{33,pq} = -\chi_{33,21}$.

Interprétation ; il s'agit d'un tenseur de contraintes planes car nous avons :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) tous les χ_{rs} sont nuls sauf $\chi_{23} = \chi_{32}$ (par hypothèse) de (1) il vient : $\sigma_{ij} = \varepsilon_{ip2}\varepsilon_{jq3}\chi_{23,pq} + \varepsilon_{ip3}\varepsilon_{jq2}\chi_{32,pq}$.

Il faut prendre $p \neq 2$ et $q \neq 3$. Comme $\underline{\underline{\chi}}$ est symétrique, nous avons : $\sigma_{ij} = \left(\varepsilon_{ip2}\varepsilon_{jq3} + \varepsilon_{ip3}\varepsilon_{jq2}\right)\chi_{23,pq}$, (d'après le premier terme $\sigma_{ij} \neq 0$ pour $i \neq 2$ soit alors $i = 3$).

Il vient : $\sigma_{3j} = \varepsilon_{312}\varepsilon_{jq3}\chi_{23,pq}$ qui impose $p = 1$ pour que $\sigma_{ij} \neq 0$; nous avons : $\sigma_{3j} = \varepsilon_{312}\varepsilon_{jq3}\chi_{23,1q}$. Les seules possibilités qui restent pour avoir $\sigma_{ij} \neq 0$ sont les couples $j = 1$ et $q = 2$ ou $j = 2$ et $q = 1$; $\sigma_{31} = \chi_{23,12}$ et $\sigma_{32} = \varepsilon_{213}\chi_{23,11}$ avec $\varepsilon_{213} = -1$, nous avons $\sigma_{32} = -\chi_{23,11}$. En définitive il vient : $\sigma_{31} = \left(\chi_{23,1}\right)_{,2}$ et $\sigma_{32} = \left(\chi_{23,1}\right)_{,1}$; c'est donc un problème de torsion : $\sigma_{13} = \mu\alpha\theta_{,2}$ et $\sigma_{23} = -\mu\alpha\theta_{,1}$.

Exercice 9

Admettons le résultat classique suivant : si $div\vec{A} = 0$, alors il existe un vecteur $\vec{B}$ tel que $\vec{A} = \overrightarrow{rot}\left(\vec{B}\right)$.

1°) Montrer que si $A_{i,i} = 0$ est un tenseur du deuxième ordre à divergence nulle, alors il existe un tenseur antisymétrique $\underline{\underline{C}}$ tel que $C_{ik,k} = A_i$.

2°) Montrer que si σ_{ij} est un tenseur du deuxième ordre à divergence nulle, alors il existe un tenseur du troisième ordre de composantes Φ_{ijk} antisymétrique par rapport aux deux derniers indices, tel que : $\sigma_{ij} = \Phi_{ijk,k}$.

3°) Supposons maintenant σ_{ij} symétrique.

a) Montrer que $\Psi_{ijk} = \Phi_{ijk} - \Phi_{jik}$ peut s'écrire sous la forme $\Psi_{ijk} = \Omega_{ijkl,l}$ où Ω_{ijkl} est un tenseur du quatrième ordre antisymétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapports aux deux derniers.
b) Montrer qu'il est possible d'écrire $\Omega_{ijkl} = \varepsilon_{rij}\varepsilon_{skl}a_{rs}$ où a_{rs} est un tenseur du deuxième ordre.
c) Montrer que Φ peut s'exprimer en fonction de Ψ par :
$$\Phi_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{ijk} + \Psi_{kij} - \Psi_{jki}\right).$$
d) Donner l'expression de σ_{ij} en fonction des éléments a_{rs}.

Solution

1°) Nous savons que $A_{i,i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \vec{B}$ tel que $A_i = \varepsilon_{ijk} B_{k,j}$. Définissons $C_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$; C_{ij} est un tenseur d'ordre deux antisymétrique car $C_{ij} = -C_{ji}$.

Il vient : $C_{ij,j} = \varepsilon_{ijk} B_{k,j} = A_i$.

2°) Considérons le i[ème] vecteur ligne de la matrice σ_{ij}. C'est un vecteur à divergence nulle. D'après le 1°) il existe un tenseur du deuxième ordre C_i antisymétrique ($C_{ijk} = -C_{ikj}$) tel que : $\sigma_{ij} = C_{ikj,k}$. Considérons le tenseur du troisième ordre $\underline{\underline{\Phi}}$, défini par ses composantes dans le repère *R* choisi au départ par : $\Phi_{ijk} = C_{ijk}$. Nous avons $\sigma_{ij} = \Phi_{ijk,k}$ et $\underline{\underline{\Phi}}$ est antisymétrique par rapport aux deux derniers indices.

Soit *R'* un autre repère et soit *Q* la matrice de passage. Notons par des indices grecs les indices relatifs à *R'* et par des indices latins les indices relatifs à *R*.

Puisque le tenseur $\underline{\underline{\Phi}}$ est défini nous avons : $\Phi'_{\alpha\beta\gamma} = Q_{i\alpha} Q_{j\beta} Q_{k\gamma} \Phi_{ijk}$.

D'autre part : $f_{,\nu} = \dfrac{\partial f}{\partial x'_\nu} = \dfrac{\partial f}{\partial x_l} \dfrac{\partial x_l}{\partial x'_\nu} = f_{,l} Q_{l\nu}$; donc $\Phi'_{\alpha\beta\gamma,\gamma} = Q_{i\alpha} Q_{j\beta} Q_{k\gamma} \Phi_{ijk,l} Q_{l\gamma}$, mais $Q_{k\gamma} Q_{l\gamma} = \delta_{kl}$, d'où : $\Phi'_{\alpha\beta\gamma,\gamma} = Q_{i\alpha} Q_{j\beta} \Phi_{ijk,k}$, ou $\Phi'_{\alpha\beta\gamma,\gamma} = Q_{i\alpha} Q_{j\beta} \sigma_{ij} = \sigma'_{\alpha\beta}$, soit encore : $\sigma'_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta\gamma,\gamma}$.

Nous pouvons donc trouver un tenseur du troisième ordre antisymétrique par rapport aux deux derniers indices tel que : $\sigma'_{ij} = \Phi_{ijk,k}$.

3°) a) Soit $\Psi_{ijk} = \Phi_{ijk} - \Phi_{jik}$. Nous avons $\Psi_{ijk,k} = \Phi_{ijk,k} - \Phi_{jik,k} = \sigma_{ij} - \sigma_{ji}$. Or par hypothèse σ_{ij} est symétrique, donc $\Psi_{ijk,k} = 0$. Le vecteur $\vec{A_{ij}}$, de k[ième] composante Ψ_{ijk}, est un vecteur à divergence nulle ; donc il existe un tenseur du deuxième ordre C_{ij} antisymétrique (c'est à dire $C_{ijkl} = -C_{ijlk}$) tel que $\Psi_{ijk} = C_{ijkl,l}$.

Définissons : $\Omega_{ijkl} = \dfrac{1}{2}\left(C_{ijkl} - C_{jikl}\right)$. Nous avons :

$\Omega_{ijkl,l} = \frac{1}{2}\left(C_{ijkl,l} - C_{jikl,l}\right) = \frac{1}{2}\left(\Psi_{ijk} - \Psi_{jik}\right)$. Mais par définition $\Psi_{ijk} = -\Psi_{jik}$ d'où : $\Omega_{ijkl,l} = \Psi_{ijk}$.

De même qu'au 2°), considérons le tenseur du quatrième ordre $\underline{\underline{\Omega}}$ défini par ses composantes dans R : Ω_{ijkl} défini ci-avant, et montrons que la relation $\Psi_{ijk} = \Omega_{ijkl,l}$ est vraie dans n'importe quel repère.

D'autre part, par définition même, le tenseur $\underline{\underline{\Omega}}$ est antisymétrique par rapport aux deux premiers indices et par rapport aux deux derniers.

3°) b) Posons : $A_{rs} = \varepsilon_{rij}\varepsilon_{skl}\Omega_{ijkl}$. Les A_{rs} sont donc les composantes dans R d'un tenseur du deuxième ordre $\underline{\underline{A}}$. Nous écrivons :

$$\varepsilon_{rpq}A_{rs} = \varepsilon_{rpq}\varepsilon_{rij}\varepsilon_{skl}\Omega_{ijkl} = \left(\delta_{pi}\delta_{qj} - \delta_{pj}\delta_{qi}\right)\varepsilon_{skl}\Omega_{ijkl} \Rightarrow$$
$$\varepsilon_{rpq}A_{rs} = \varepsilon_{skl}\left(\Omega_{pqkl} - \Omega_{qpkl}\right) = 2\varepsilon_{skl}\Omega_{pqkl} \Rightarrow \varepsilon_{sij}\varepsilon_{rpq}A_{rs} = 2\varepsilon_{sij}\varepsilon_{skl}\Omega_{pqkl} \Rightarrow$$
$$\varepsilon_{sij}\varepsilon_{rpq}A_{rs} = 2\left(\Omega_{pqij} - \Omega_{pqji}\right) = 4\Omega_{pqij}.$$

Il vient donc :

$$\Omega_{ijkl} = \varepsilon_{rij}\varepsilon_{skl}a_{rs},$$

où a_{rs} est un tenseur du deuxième ordre, nous avons :

$$a_{rs} = \frac{1}{4}A_{rs}.$$

3°) c) Nous avons $\Psi_{ijk} = \Phi_{ijk} - \Phi_{jik} = \Phi_{ijk} + \Phi_{jki}$ (puisque Φ_{ijk} est antisymétrique en j et k), de même $\Psi_{kij} = \Phi_{kij} - \Phi_{ikj} = \Phi_{kij} + \Phi_{ijk}$ et $\Psi_{jki} = \Phi_{jki} - \Phi_{kij} = \Phi_{jki} + \Phi_{kij}$.

Additionnons les deux premières relations et soustrayons la dernière, il vient :

$$\Psi_{ijk} + \Psi_{kij} - \Psi_{jki} = 2\Phi_{ijk}.$$

3°) d) Nous avons vu que $\sigma_{ij} = \Phi_{ijk,k}$ ce qui implique $\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\Psi_{ijk,k} + \Psi_{kij,k} - \Psi_{jki,k}\right) = -\frac{1}{2}\left(\Omega_{ikjl,kl} + \Omega_{jlik,kl}\right)$ (en utilisant l'antisymétrie de Ω_{pqrs} par rapport à p et q et la symétrie de $f_{,kl} = f_{,lk}$).

Mais nous savons que $\Omega_{ijkl} = \varepsilon_{rij}\varepsilon_{skl}a_{rs} \Rightarrow \Omega_{jlik} = \varepsilon_{sjl}\varepsilon_{rik}a_{sr}$,

d'où :

$$\sigma_{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{rik}\varepsilon_{sjl}\left(a_{rs} + a_{sr}\right)_{,kl}.$$

Problèmes

Problème 1

1°) Montrer qu'il est possible d'exprimer les valeurs propres (σ_i) du tenseur des contraintes $\underline{\underline{T}}$ du deuxième ordre dans R^3 par :

$$\sigma_1 \to s + 2\theta sin\psi \to s + s_1,$$

$$\sigma_2 \to s + 2\theta sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) \to s + s_2,$$

$$\sigma_3 \to s + 2\theta sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \to s + s_3,$$

où $\theta > 0$ et ψ sont les paramètres de Lod, s_i est la valeur propre du déviateur de $\underline{\underline{T}}$, $3s = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$.

2°) Etablir que :

a) $\theta = \left(\frac{S_2'}{3}\right)^{1/2}$ où S_2' est l'opposé du 2ème invariant de $\underline{\underline{T}}$.

b) $\sin 3\psi = -\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{S_3}{\left(S_2^{'}\right)^{3/2}}$.

Solution

1°) Soit s la valeur moyenne, $3s = \sigma_{ii}$ (trace de $\underline{\underline{T}}$), les valeurs propres de $\underline{\underline{T}}$ sont $\sigma_i = s + s_i$ (s_i valeur propre du déviateur des contraintes s_{ij}) $I_1 = s_1 + s_2 + s_3 = 0$. Il est possible de vérifier que : $2\theta\sin\psi + 2\theta\sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) + 2\theta\sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

Si $\theta \neq 0$ il faut que la somme des sinus soit nulle. Or : $\sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin\psi + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi$ et $\sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\sin\psi - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\psi$;

d'où : $s_1 + s_2 + s_3 = 0$.

2°) a) En introduisant les éléments du déviateur des contraintes $\underline{\underline{T}}$ nous avons :
$s_{ij} = \sigma_{ij} - s\delta_{ij}$. $s_{ii} = 0 \Rightarrow (s_1 + s_2 + s_3)^2 = 0 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + 2(s_1 s_2 + s_3 s_2 + s_1 s_3)$; d'où :
$I_2 = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right) \Rightarrow I_2 = \frac{4\theta^2}{2}\left(\sin^2\psi + \frac{3}{2}\cos^2\psi + \frac{1}{2}\sin^2\psi\right) \Rightarrow$
$I_2 = 3\theta^2 \Rightarrow \theta = \varepsilon\left(\frac{I_2}{3}\right)^{1/2}$, ($\varepsilon = \pm 1$).

2°) b) $I_3 = s_1 s_2 s_3 \Rightarrow I_3 = 8\theta^3\sin\psi\left(\frac{1}{4}\sin^2\psi - \frac{3}{4}\cos^2\psi\right) = 8\theta^3\sin\psi\left(-\frac{3}{4} + \sin^2\psi\right)$
$\Rightarrow I_3 = 8\theta^3\left(\sin^3\psi - \frac{3}{4}\sin\psi\right)$, en utilisant la relation $\sin 3\psi = 3\sin\psi - 4\sin^3\psi$ il vient :

$I_3 = -2\theta^3 \sin 3\psi$ soit encore : $\sin 3\psi = -\dfrac{I_3}{2\theta^3} = -\dfrac{I_3}{2\left(\varepsilon \dfrac{I_2}{3}\right)^{3/2}}$. L'existence de $\sin 3\psi$ implique : $\varepsilon = \pm 1$ et $\theta > 0$.

Problème 2

Supposons que : $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$; τ_{ij} tenseur des contraintes visqueuses ;

$\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B}$, $\vec{j}$ densité volumique de courant, $\vec{B}$ le vecteur induction magnétique de loi de comportement : $\vec{B} = \mu \vec{H}$, $\vec{H}$ champ magnétique ;

$r = \vec{E}.\vec{j}$, r taux de chaleur dissipée par effet Joule, $\vec{E}$ champ électrique.

Les trois équations de Maxwell sont :

$$div\vec{B} = 0,\ \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j},\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Admettons que : $\underline{\underline{\pi}} = \dfrac{1}{\mu}\vec{B} \otimes \vec{B} - \dfrac{B^2}{2\mu}\underline{\underline{g}}$, avec $\underline{\underline{\pi}}$ tenseur des contraintes magnétiques, $\underline{\underline{g}}$ tenseur métrique (δ_{ij}) et $\otimes$ produit tensoriel.

1°) Montrer que : $f_i = \pi_{ij,j}$.

2°) Etablir que : $r = -div\vec{P} - \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial B^2}{\partial t}$, avec $\vec{P} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ vecteur de Poynting.

3°) Donner les équations locales de conservation.

4°) Quelle est la loi de continuité correspondante ?

Solution

1°) $\vec{f} = \vec{j} \wedge \vec{B} \;\Rightarrow\; f_i = \varepsilon_{ijk} j_j B_k$ et $\overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} \;\Rightarrow\; j_j = \varepsilon_{jlm} H_{m,l}$ et $\vec{B} = \mu\vec{H} \;\Rightarrow$ $B_k = \mu H_k$. D'où :

$$f_i = \frac{1}{\mu}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jlm}B_k B_{m,l} = \frac{1}{\mu}\left(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}\right)B_k B_{m,l},$$

$f_i = \frac{1}{\mu}\left(B_l B_{i,l} - B_m B_{m,i}\right) = \frac{1}{\mu}\left(B_l B_{i,l} - B_l B_{l,i}\right)$. Or : $\left(B_l B_l\right)_{,i} = 2B_{l,i}B_l$ et

$\left(B_l B_i\right)_{,l} = B_{l,l}B_i + B_l B_{i,l} = B_l B_{i,l}$, car $div\vec{B} = B_{l,l} = 0$,

$f_i = \frac{1}{\mu}\left(\left[B_l B_i\right]_{,l} - \frac{1}{2}\left[B_l B_l\right]_{,i}\right) = \frac{1}{\mu}\left(B_i B_j - \frac{1}{2}B_l B_l \delta_{ij}\right)_{,j}$. Mais $\pi_{ij} = \frac{1}{\mu}\left[B_i B_j - \frac{B_l B_l}{2}\delta_{ij}\right]$

d'où :

$$f_i = \frac{1}{\mu}\left[B_i B_j - \frac{B_l B_l}{2}\delta_{ij}\right]_{,j} = \pi_{ij,j}.$$

2°) $div\left(\vec{E} \wedge \vec{H}\right) = \vec{H}\,\overrightarrow{rot}\vec{E} - \vec{E}\,\overrightarrow{rot}\vec{H}$, $div\vec{P} = -\vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\vec{j} \;\Rightarrow$

$$r = -div\vec{P} - \vec{H}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -div\vec{P} - \frac{\vec{B}}{\mu}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \;\Rightarrow\; r = -div\vec{P} - \frac{1}{2\mu}\frac{\partial\vec{B}^2}{\partial t}.$$

3°) Loi de conservation :

$$\frac{d}{dt}\int_D \overline{A_i}dv + \int_{\partial D}\alpha_i\, d\sigma = \int_D A_i\, dv.$$

Conservation de la quantité de mouvement : $\overline{A}_i = \rho u_i$, $\alpha_i = -T_i$, $T_i = \sigma_{ij}n_j$ (contrainte qui s'exerce sur la frontière ∂D) ; $A_i = f_i$ (force de volume). Désignons par dv l'élément de volume et par $d\sigma$ l'élément d'aire. Il vient :

$\frac{d}{dt}\int_D \rho u_i\, dv - \int_{\partial D}\sigma_{ij}n_j\, d\sigma = \int_D f_i\, dv$, or $\int_{\partial D}\sigma_{ij}n_j\, d\sigma = \int_D \sigma_{ij,j}\, dv$ (théorème de la divergence) $\Rightarrow$ $\frac{d}{dt}\int_D C\, dv = \int_D \left\{\frac{\partial C}{\partial t} + div\left(C\vec{u}\right)\right\} dv$.

Supposons ρ constante, il vient :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho u_i\, dv = \int_D \left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(\rho u_i u_j\right)_{,j}\right\} dv \ ; \ \int_D \left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(\rho u_i u_j\right)_{,j}\right\} dv - \int_D \sigma_{ij,j} dv = \int_D \pi_{ij,j}\, dv .$$

La loi de conservation de la quantité de mouvement s'obtient sous la forme :

$$\int_D \left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(\rho u_i u_j\right)_{,j} - \sigma_{ij,j} - \pi_{ij,j}\right\} dv = 0 \text{ (forme globale) et}$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \left(\rho u_i u_j\right)_{,j} - \sigma_{ij,j} - \pi_{ij,j} = 0 \text{ (forme locale).}$$

Conservation de l'énergie :

$\overline{A} = \rho\left(e + \frac{1}{2}u_i u_i\right)$, $\alpha = -u_i\sigma_{ij}n_j + q_i n_i = -u_i T_i + q_i n_i$, $A = f_i u_i + r$ où q est le taux de chaleur reçue par conduction et r le taux de chaleur dissipée, ici par effet Joule. La loi de conservation devient :

$$\frac{d}{dt}\int_D \rho\left(e + \frac{1}{2}u_i u_i\right) dv - \int_{\partial D}\left(\sigma_{ij}n_j u_i - q_i n_i\right) d\sigma - \int_D \left(f_i u_i + r\right) dv = 0 ,$$

soit :

$$\int_D \left\{\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}u_i u_i\right)\right] + \left[\rho\left(e + \frac{1}{2}u_i u_i\right)u_j\right]_{,j} - \left(\sigma_{ij}u_i\right)_{,j} + q_{i,i} - \left(f_i u_i + r\right)\right\} dv = 0 , \text{ (forme globale),}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e + \frac{1}{2}u_i u_i\right)\right] + \left[\rho\left(e + \frac{1}{2}u_i u_i\right)u_j\right]_{,j} - \left(\sigma_{ij}u_i\right)_{,j} + q_{i,i} - \left(f_i u_i + r\right) = 0 \text{ (forme locale).}$$

Remplaçons alors σ_{ij} et r par leurs valeurs, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}u_i u_i\right)\right]+\left[\rho\left(e+\frac{1}{2}u_i u_i\right)u_j\right]_{,j}+\left(p\delta_{ij}u_i\right)_{,j}-\left(\tau_{ij}u_i\right)_{,j}+q_{i,i}-f_i u_i+P_{i,i}$$

$$+\frac{1}{\mu}B_k\frac{\partial B_k}{\partial t}=0,$$

mais $f_i=\pi_{ij,j}$ d'où :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(e+\underline{\frac{1}{2}u_i u_i}\right)\right]+\left\{\rho\left(e+\underline{\frac{1}{2}u_i u_i}\right)u_j+\underline{pu_j}-\underline{\tau_{ij}u_i}+q_j+P_j-\underline{\pi_{ij}u_i}\right\}_{,j}+\pi_{ij}u_{i,j}$$

$$+\frac{1}{\mu}B_k\frac{\partial B_k}{\partial t}=0,$$

et $\pi_{ij}=\pi_{ji}$ (tenseur $\underline{\underline{g}}$ est symétrique) donc $\pi_{ij}u_{i,j}=\pi_{ij}D_{ij}$; en faisant intervenir l'équation de la quantité de mouvement, les termes soulignés disparaissent. Il reste :

$$\frac{d(\rho e)}{dt}+q_{j,j}+P_{j,j}+\pi_{ij}D_{ij}+\frac{1}{\mu}B_k\frac{\partial B_k}{\partial t}=0\,.$$

2. Puissances virtuelles

Rappels

La méthode des puissances virtuelles (PV) est une approche fonctionnelle qui lie deux espaces : celui des efforts $\{ F \}$ à celui des mouvements virtuels $\{ U^* \}$ par leur produit scalaire qui est un nombre réel noté P^*. Ce nombre réel P^* est une forme linéaire sur $\{ U^* \}$, notée $\mathcal{L}$.

Définitions

Définition 1

Dans un référentiel R (O ; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$), un mouvement virtuel d'un système S est défini à l'instant t fixé, dès lors qu'un champ de vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{U}^*}$, défini sur la configuration S^t, est donné. Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{U}^*}(M)$ de ce champ $\overrightarrow{\mathcal{U}^*}$ en M, est appelé « vitesse virtuelle » dans R de la particule M de S à l'instant t.

Remarque. La fonction à valeurs vectorielles $\overrightarrow{\mathcal{U}^*}$ (M) peut être générale. Elle peut ne pas vérifier les conditions cinématiques auxquelles est soumis le champ des vitesses réelles. Le référentiel R peut ne pas être galiléen.

Définition 2

$\overrightarrow{\mathcal{U}^*}(M)$ et $\vec{\mathcal{U}}(M)$ définissent à l'instant t (fixé) le même mouvement virtuel de S observé respectivement dans R et dans R, si en chaque point M de S nous avons :*

$$\vec{\mathcal{U}}(M) = \overrightarrow{\mathcal{U}^*}(M) + \vec{\mathcal{U}}_e(M)$$

où $\vec{\mathcal{U}}_e$ désigne la vitesse d'entraînement réelle de M, c'est-à-dire la vitesse dans R du point lié à R qui, à l'instant t, coïncide avec le point M.*

Définition 3

Un mouvement virtuel défini sur S à t fixé est dit rigidifiant (mvr) si le champ des vitesses $\vec{\mathsf{U}}(M)$ *en un point M est un distributeur* $\{\ C\ \}$ *(ou torseur), c'est-à-dire :*

$$\{\mathsf{C}\} = {}_{M}\begin{cases} \vec{\omega} \\ \\ \vec{\mathsf{U}}(M) \end{cases}$$

$\vec{\omega}$ *rotation (résultante),* $\vec{\mathsf{U}}(M)$ *vitesse en M (moment résultant).*

Définition 4

Soit Σ un système extérieur à *S* (les points intérieurs à Σ et à *S* sont donc disjoints).

A un <u>instant donné t</u> et pour un espace vectoriel de mouvements virtuels $\vec{\mathsf{U}}$*, les efforts exercés par Σ sur S sont représentés par une fonction linéaire et continue à valeurs réelles (ou forme linéaire continue* $\mathcal{L}$*) définie sur* $\vec{\mathsf{U}}$ *telle que :*

$$P^* = \mathcal{L}(\vec{\mathsf{U}}).$$

Le nombre réel P est appelé puissance virtuelle de ces efforts dans le mouvement virtuel* $\vec{\mathsf{U}}$.

Champ des vitesses virtuelles

L'étude du champ des vitesses $\vec{\mathsf{U}}$ est suffisante dans le cas des corps rigides. Mais la théorie doit être affinée pour mettre en évidence les mouvements à l'intérieur des milieux continus. Il est ainsi nécessaire de considérer non seulement $\vec{\mathsf{U}}$, mais aussi son gradient, $u_{i,j}$ (ici théorie dite du premier gradient puisque faisant intervenir seulement les dérivées premières de u_i). Il est ensuite aisé de construire localement une forme linéaire, puis de l'intégrer. Par ailleurs, nous disposons des identités suivantes:

$$u_{i,j} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) + \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) \Leftrightarrow u_{i,j} = D_{ij} + \Omega_{ij},$$

soit en notation intrinsèque :

$$\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{\Omega}}$$

où $\underline{\underline{D}}$ (D_{ij}= 1/2 ($u_{i,j}$ + $u_{j,i}$)), tenseur des taux de déformation (ou partie paire du gradient) est la partie symétrique du tenseur $\underline{\underline{U}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$ (Ω_{ij}=1/2 ($u_{i,j}$ - $u_{j,i}$)), tenseur des taux de rotation (ou partie impaire du gradient), est la partie antisymétrique du tenseur $\underline{\underline{U}}$ (cette notation – une lettre soulignée de deux barres – sera utilisée de façon plus générale pour désigner un tenseur).

Introduisons les hypothèses ci-dessous. La puissance virtuelle des efforts intérieurs $P^*_{(i)}$ est une forme linéaire continue sur $\vec{U}$.

a) Alors $P^*_{(i)}$ admet une densité volumique p telle que :

$$P^*_{(i)} = \int_S p\, dv \,,$$

b) et p est en chaque point une forme linéaire des valeurs <u>en ce point</u> de $\vec{U}$ et de ses dérivées premières. Plus précisément :

$$p = f_i U_i + B_{ij}\Omega_{ij} - \sigma_{ij} D_{ij} \,,$$

où, B_{ij} est un tenseur antisymétrique et σ_{ij} un tenseur symétrique, ce qui s'écrit en notation intrinsèque :

$$p = \vec{f}.\vec{U} + tr(\underline{\underline{B}}.\underline{\underline{\Omega}}) - tr(\underline{\underline{\Sigma}}.\underline{\underline{D}}) \,.$$

Enoncé du principe des puissances virtuelles

S étant en mouvement, il existe toujours un repère *R* galiléen tel qu'à chaque instant :

1°) dans tout mouvement virtuel rigidifiant $P^*_{(i)} = 0$,

2°) dans tout mouvement virtuel $\overrightarrow{U^*}(M)$,

$$P^*_{(i)} + P^*_e = A^* \qquad (1\text{-}1)$$

avec :

$A^* = \int \vec{\gamma}(M)\overrightarrow{\mathrm{U}^*}(M)\rho\, dv$, la puissance virtuelle des quantités d'accélération,

$P^*_e = \int\limits_S f_i \mathrm{U}^*_i dv + \int\limits_{\partial S} T_i \mathrm{U}^*_i ds$, la puissance virtuelle des efforts extérieurs.

$P^*_{(i)}$ est alors qualifiée de quantité objective, c'est-à-dire qu'elle est indépendante du référentiel dans lequel le mouvement est observé. $P^*_{(i)}$ est donc intrinsèquement liée au système S en mouvement. Ici est désigné par : $\vec{\gamma}(M)$ l'accélération en M, f_i les efforts extérieurs volumiques et T_i les efforts extérieurs surfaciques.

Remarque 1. Puisque $P^*_{(i)} = 0$ pour tout mouvement rigidifiant, alors :

$$P^*_e = A^*.$$

C'est la loi fondamentale de la dynamique.

Remarque 2. Il est facile de montrer que : $f_i = 0$ et $B_{ij} = 0$, c'est-à-dire que :

$$P^*_{(i)} = -\int\limits_S \sigma_{ij} D^*_{ij} dv$$

(dans un mouvement rigidifiant, $\vec{\mathrm{U}}$ devient un mouvement de translation donc $\underline{\underline{D}}$ et $\underline{\underline{\Omega}}$ sont nuls ; $P^*(\mathrm{i}) = 0 \Rightarrow f_i = 0$).

Grâce au théorème de la divergence ($\int\limits_S A_{i,j} dv = \int\limits_{\partial S} A_i n_j\, ds,\ \forall A_i \in S,$ où n_j désigne la normale extérieure à la frontière ∂S du domaine S), il est possible de réécrire (1-1) :

$$\int\limits_S \left(f_i + \sigma_{ij,j} - \rho\gamma_i\right)\mathrm{U}^*_i dv + \int\limits_{\partial S}\left(T_i - \sigma_{ij} n_j\right)\mathrm{U}^*_i ds = 0, \forall \mathrm{U}^*_i,$$

soit :

$$\rho \gamma_i = f_i + \sigma_{ij,j} \text{ en tout point de } S. \tag{1-2}$$

C'est la loi fondamentale de la mécanique des milieux continus. De même :

$$T_i = \sigma_{ij} n_j \text{ en tout point de la frontière } \partial S \text{ de } S \tag{1-3}$$

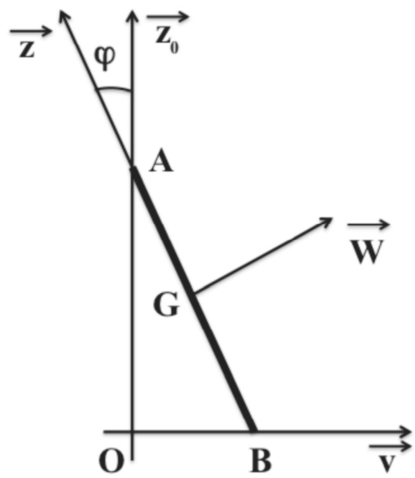
sont les conditions aux limites où T_i sont les composantes du vecteur contrainte en M pour la direction $\vec{n}$; $\vec{T}(M,\vec{n}) = \underline{\underline{\sigma}}\vec{n}$.

Grâce au choix du champ virtuel $\overrightarrow{U^*}(M)$, nous obtenons directement :

- les équations de mouvement pour S (cf. 1-2) ;
- les conditions aux limites s'exerçant sur ∂S (cf. 1-3).

Exercices

Exercice 1



Soit une barre AB homogène, pesante, de longueur 2ℓ, de masse m, de section négligeable. Son extrémité A est astreinte à se déplacer sans frottement le long d'un axe vertical fixe $\overrightarrow{Oz_0}$, orienté dans le sens ascendant. La barre peut tourner sans frottement autour de A. Désignons par $\overrightarrow{R_A}$ et $\overrightarrow{M_A}$ les éléments de réduction en A du torseur des efforts de liaison exercé par $\overrightarrow{Oz_0}$ sur AB. La barre repose sans frottement sur le plan horizontal rapporté aux axes fixes $\overrightarrow{Ox_0}$, $\overrightarrow{Oy_0}$. Le trièdre O $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{y_0}, \overrightarrow{z_0}$ est fixe. Soit $\overrightarrow{R_B}$ la réaction de la liaison en B du plan sur la barre. La position de la barre AB est repérée dans le repère O, $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{z_0}$ dans lequel $\vec{v}$

est un vecteur unitaire de la droite d'intersection du plan $\overrightarrow{Ox_0}$, $\overrightarrow{Oy_0}$ avec le plan vertical ($\overrightarrow{Oz_0}$, AB). Il est conseillé de poser : $\psi = \left(\overrightarrow{Ox_0}, \vec{v}\right)$ dans le plan orienté par $\overrightarrow{Oz_0}$ et $\varphi = \left(\overrightarrow{Oz_0}, \overrightarrow{AB}\right)$ dans le plan orienté par $\vec{u}$.

En utilisant le principe des puissances virtuelles montrer que :

$$\overrightarrow{R_A} \bullet \overrightarrow{z_O} = 0 \ , \ \overrightarrow{M_A} \bullet \overrightarrow{z_O} = 0 \, , \ \overrightarrow{M_A} \bullet \vec{u} = 0 \, , \ \overrightarrow{R_B} = \lambda \overrightarrow{z_O} \, .$$

Solution

La liaison exercée par $\overrightarrow{Oz_0}$ sur AB étant parfaite, la puissance virtuelle des efforts de liaison est nulle pour tout champ de vitesse virtuelle compatible avec la liaison. La puissance virtuelle des inter-efforts de liaison est :

$$P^* = \overrightarrow{R_A} \bullet \overset{\bullet}{z}^* \, \overrightarrow{z_0} + \overrightarrow{M_A} \bullet \left(\overset{\bullet}{\psi}^* \, \overrightarrow{z_0} + \overset{\bullet}{\varphi}^* \, \vec{u} \right) = 0 \ \forall \ \overset{\bullet}{z}^* , \ \overset{\bullet}{\psi}^* , \ \overset{\bullet}{\varphi}^* \ \Rightarrow \ \overrightarrow{R_A} \bullet \overrightarrow{z_0} = 0 \, ,$$

$\overrightarrow{M_A} \bullet \overrightarrow{z_0} = 0$, $\overrightarrow{M_A} \bullet \vec{u} = 0$.

En B la liaison étant parfaite conduit à :

$$\overrightarrow{R_B} \bullet \overrightarrow{V(B)} = 0 \, .$$

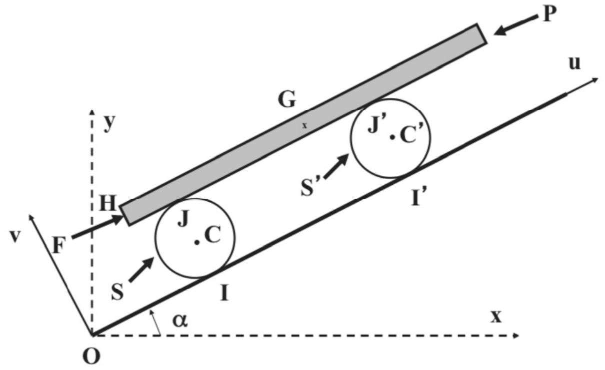
Or $\overrightarrow{V(B)} = \overset{\bullet}{x}^* \, \overrightarrow{x_0} + \overset{\bullet}{y}^* \, \overrightarrow{y_0}$ donne :

$$\overrightarrow{R_B} \left(\overset{\bullet}{x}^* \, \overrightarrow{x_0} + \overset{\bullet}{y}^* \, \overrightarrow{y_0} \right) = 0 \ \forall \ \overset{\bullet}{x}^* , \ \overset{\bullet}{y}^*$$

d'où : $\overrightarrow{R_B} = \lambda \overrightarrow{z_0}$; λ scalaire.

Exercice 2

Un plateau P, de masse M, de centre d'inertie G, est posé sur



deux rouleaux cylindriques identiques (points de contact *I* et *I'*). Ces deux rouleaux *S* et *S'*, de masse identique *Q*, reposent, en *I* et *I'*, sur un plan incliné d'un angle α avec le plan horizontal (les axes de ces rouleaux sont des horizontales du plan incliné). Tous les contacts (rouleaux / sol, rouleaux / plateau) ont lieu sans glissement. Nous souhaitons déterminer, par la méthode des puissances virtuelles, la force *F* qu'il faut exercer sur le plateau en *H* pour maintenir l'ensemble à l'équilibre.

1°) Montrer que dans tout mouvement virtuel respectant les conditions de non glissement, les deux rouleaux ont même taux de rotation, et que les vitesses des centres *C* et *C'* des rouleaux et d'un point du plateau sont reliées par des relations simples à expliciter.

2°) En appliquant le théorème des puissances virtuelles au système, déterminer la force *F* à exercer sur le plateau en *H* pour qu'il y ait équilibre.

Solution

1°) Relation entre les vitesses virtuelles de *J*, *J'*, *C* et *C'*.

Soit *R* un repère lié au sol, $\vec{\omega}_{(S/R)}$ (resp. $\vec{\omega}'_{(S'/R)}$) le taux de rotation de *S* (resp. *S'*) par rapport à *R*, le non glissement en *I* et *J* se traduit par :

$\vec{V}(I \in S/R) = \vec{0}$ et $\vec{V}(J \in P/R) = \vec{V}(J \in S/R)$ ce qui implique :
$\vec{V}(J \in P/R) = \vec{0} + \vec{\omega}_{(S/R)} \wedge \overrightarrow{IJ} = \omega\vec{z} \wedge \overrightarrow{IJ}$ ($\vec{z}$ horizontal), de même le non glissement en *I'* et *J'* implique : $\vec{V}(J' \in P/R) = \vec{0} + \vec{\omega}_{(S'/R)} \wedge \overrightarrow{I'J'} = \omega'\vec{z} \wedge \overrightarrow{I'J'}$.

Il en résulte que : $\vec{V}(J \in P/R)$ et $\vec{V}(J' \in P/R)$ sont portés par $\vec{u}$.

De plus, le plateau est en translation parallèlement à $\vec{u}$:

$$\vec{V}(J \in P/R) = \vec{V}(J' \in P/R) + \vec{\omega}_{(P/R)} \wedge \overrightarrow{JJ'}.$$

Comme le premier et le second terme sont parallèles à $\vec{u}$ et que le dernier terme est perpendiculaire à $\vec{u}$ (car $\overrightarrow{JJ'}$ est parallèle à $\vec{u}$), il en résulte que : $\vec{\omega}_{(P/R)} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

Or $\vec{\omega}_{(P/R)}$ parallèle à $\vec{v}$ implique $\vec{\omega}_{(P/R)} = \vec{0}$.

Donc tous les points du plateau ont la même vitesse, d'où : $\omega\vec{z} \wedge \overrightarrow{IJ} = \omega'\vec{z} \wedge \overrightarrow{I'J'}$; or $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{I'J'} \Rightarrow \omega = \omega'$ et donc : $\vec{V}(C \in S/R) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{IC} = \omega\vec{z} \wedge \overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\omega\vec{z} \wedge \overrightarrow{IJ}$. Le non glissement en *I*, *J*, *I'*, *J'*, implique : $\omega = \omega'$ et $\vec{V}(G/R) = \vec{V}(H/R) = 2\vec{V}(C/R)$.

Donc dans tout mouvement virtuel respectant le non glissement, nous avons :

$$\vec{V}^*(G/R) = \vec{V}^*(H/R) = 2\vec{V}^*(C/R) = 2\vec{V}^*(C'/R) = 2v^*\vec{u} \text{ où } v^* \in \Re .$$

2°) Application du théorème des puissances virtuelles.

Nous devons avoir :

$$P^*(F) + P^*(pesanteur) + P^*(sol \rightarrow rouleaux) + P^*(rouleaux \leftrightarrow P) = 0,$$

quel que soit le mouvement virtuel défini par un distributeur dans chacun des solides (c'est-à-dire, pour tout mouvement virtuel rigidifiant chaque solide).

$P^*(F) = \vec{F}.\vec{V}^*(H)$, $P^*(pesanteur) = -P\vec{z}.\vec{V}^*(G) - Q\vec{z}.\vec{V}^*(C) - Q\vec{z}.\vec{V}^*(C')$,
$P^*(sol \rightarrow rouleaux) = 0$, si nous prenons un champ des vitesses virtuelles respectant le non-glissement en *I* et *I'*.

$P^*(rouleaux \leftrightarrow P) = 0$, si nous prenons un champ des vitesses virtuelles respectant le non-glissement en *I* et *J'*. D'où :

$$\vec{F}.\vec{V}^*(H) - P\vec{z}.\vec{V}^*(G) - Q\vec{z}.\vec{V}^*(C) - Q\vec{z}.\vec{V}^*(C') = 0 ,$$

pour tout champ des vitesses virtuelles compatibles avec le non glissement et la rigidité des solides. Mais nous avons vu au 1°) les relations :

$$\vec{V}^*(H) = \vec{V}^*(G) = 2\vec{V}^*(C) = 2\vec{V}^*(C') = 2v^*\vec{u} \Rightarrow$$

$$\vec{F}.2v^*\vec{u} - P\vec{z}.2v^*\vec{u} - Q\vec{z}.v^*\vec{u} - Q\vec{z}.v^*\vec{u} = 0 \Rightarrow$$

$$\vec{F}\vec{u} = (P+Q)\sin\alpha \Rightarrow \vec{F} = (P+Q)\sin\alpha\vec{u} .$$