

Modelare și simulare

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

RAICA, PAULA

Modelare și simulare / Paula Raica. - București :
Editura Academiei Oamenilor de Știință din România,
2011

Bibliogr.

Index

ISBN 978-606-8371-24-5

681.5

Editura Academiei Oamenilor de Știință din România

Adresa: Splaiul Independenței, nr. 54, sectorul 5, cod 050094 București, România

Redactor: ing. Mihail CĂRUȚAȘU

Documentarist: ing. Ioan BALINT

Coperta: ing. sist. Adrian Nicolae STAN

**Copyright © Editura Academiei Oamenilor de Știință din România,
București, 2011**

Paula Raica

Modelare și simulare



Editura Academiei Oamenilor de Știință din România

București

2011

CUPRINS

1. Introducere în modelarea sistemelor.....	7
1.1. Noțiuni generale. De ce modelare matematică?.....	7
1.2. Modele și terminologie	8
1.3. Clasificarea modelelor	10
1.4. Etapele modelării matematice	11
Procedura.....	11
Reguli generale și observații privind procesul de modelare matematică	15
2. Formularea modelelor matematice	19
2.1. Analiza sistemului.....	19
2.2. Alegerea ecuațiilor matematice.....	20
2.3. Rezolvarea ecuațiilor diferențiale: introducere în simulare	23
Simularea sistemelor	23
Metode numerice pentru ecuații diferențiale.....	23
3. Metodologii de simulare	29
3.1. Clasificarea tehnicilor de simulare	29
Simulare analogică	29
Simulare numerică.....	29
Simularea sistemelor utilizând medii de calcul științific.....	31
Introducere în Matlab	31
Rezolvarea ecuațiilor diferențiale în Matlab	41
4. Modele pentru sisteme neliniare și pentru sisteme liniare	49
4.1. Sisteme liniare și sisteme neliniare.....	49
4.2. Sisteme neliniare. Liniarizare.....	51

5. Evaluarea și testarea modelelor matematice. Utilizarea modelelor pentru analiza sistemelor	57
5.1. Validarea modelelor	57
5.2. Utilizarea modelelor pentru predicția și analiza sistemelor	59
Bibliografie	64

Capitolul 1

1. Introducere în modelarea sistemelor

1.1. Noțiuni generale. De ce modelare matematică?

Modelele și simularea au fost întotdeauna o parte esențială a experienței umane - sunt mijloace de a trata realitatea. Oamenii au utilizat întotdeauna modele mentale pentru a înțelege mai bine realitatea, pentru a face planuri, pentru a considera diferite posibilități, pentru a încerca alternative sau pentru ca să se convingă că unele idei nu pot fi realizate, [5].

Chiar din timpuri mai vechi, clădirile sau mașinile au fost mai întâi testate pe modele mai mici înainte să fie construite la scală mare. Jocurile copiilor sunt simulări ale lumii adulților – utilizând modele de oameni, obiecte sau animale.

În zilele noastre, modelarea proceselor este mult utilizată de la sinteza și proiectarea instalațiilor, până la planificarea operațiilor, monitorizarea și controlul proceselor. Creșterea calității produselor, a siguranței în utilizare, necesită o îmbunătățire continuă a modelelor proceselor în timp minim și cu cost minim. Odată cu creșterea complexității proceselor, formularea unor modele adecvate a devenit o sarcină care necesită un timp îndelungat și cunoștințe multidisciplinare. Literatura de specialitate referitoare la modelarea proceselor se concentrează de obicei asupra determinării și rezolvării unor ecuații matematice.

Modelarea matematică este arta transformării problemelor dintr-o arie de aplicație într-o formulare matematică a cărei analiză teoretică și numerică va furniza detalii și răspunsuri la aspecte referitoare la aplicația originală.

Studiul modelării matematice este un pas important de la pregătirea matematică de bază la experiența în matematica orientată spre aplicații și permite celui care o stăpânește să facă față provocărilor culturii tehnologice moderne.

Modelarea matematică este aplicată cu succes în multe aplicații, dă precizie și direcționează rezolvarea problemei și permite o înțelegere aprofundată a sistemului modelat. Se pregătește astfel calea pentru proiectarea sau pentru controlul unui sistem și permite utilizarea eficientă a posibilităților de calcul moderne.

Pentru a extrage informații numerice din modele matematice sunt necesare cunoștințe diverse de analiză numerică, optimizare și metode

numerice pentru ecuații cu derivate parțiale. O listă de subiecte necesare pentru stăpânirea deplină a artei modelării matematice include:

- *Algebră liniară*: sisteme de ecuații liniare, valori proprii, programare liniară,
- *Analiză numerică*: evaluarea funcțiilor, derivare numerică, interpolare, aproximare (Padé, cele mai mici pătrate), integrare numerică, transformata Fourier, sisteme de ecuații neliniare, optimizare/programare neliniară,
- *Analiză de date numerice*: vizualizare (geometrie computațională 2D/3D, estimarea parametrilor, predicție, clasificare, analiza seriilor temporale, numere aleatoare,
- *Analiză funcțională*: ecuații diferențiale ordinare, ecuații cu derivate parțiale, ecuații diferențiale stohastice, ecuații integrale.
- *Metode analitice*: calcul simbolic, sortare, compresie, criptografie, coduri corectoare de erori

Exemple de modelare matematică pot fi întâlnite în cele mai variate contexte, ca de exemplu în:

- sisteme biologice (creștere, comportament, interacțiuni între specii, reacții, comportamentul celulelor)
- sisteme fizice (propagarea luminii sau a valurilor, atomi, magneți, mișcarea planetelor)
- sisteme economice (evoluția pieței financiare, creșterea economică)
- comportament social (migrare, conflicte, interacțiuni)
- industrie (transport, analiza și controlul traficului, sisteme de producție)

1.2. Modele și terminologie

Există multe definiții ale termenului **model** sau **model matematic**.

Un **model matematic** este o reprezentare abstractă care utilizează tehnicile matematicii pentru a descrie comportamentul unui sistem.

Se spune că un sistem de ecuații E este un model al unui sistem S , dacă el este formulat pentru a exprima legile lui S și soluția lui intenționează să reprezinte unele aspecte din comportamentul lui S , [1].

O altă abordare denumesc termenul de model matematic ca "o construcție matematică abstractă, simplificată, asociată cu o parte a realității și creată pentru un scop particular", [3].

Eykhof (1974) a definit un model matematic ca și o “reprezentare a aspectelor esențiale a unui sistem existent (sau a unui sistem care urmează a fi construit) care prezintă informații despre sistem într-o formă utilă”.

Exemplul 1.2.1. Sistem mecanic, [2]

Se consideră sistemul mecanic din Figura 1-1 constând dintr-un corp de masă m , care se poate mișca pe orizontală, pe axa x . Localizarea corpului este identificată prin coordonata centrului de masă P , care este atașat de un fir elastic cu capetele A și P .

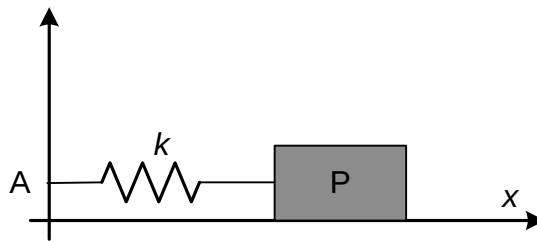


Figura 1-1. Sistem mecanic

Presupunerile care definesc sistemul mecanic sunt:

- sistemul se comportă ca un punct de masă m localizat prin coordonata x .
- firul elastic acționează cu o forță $T = kx$, direcționată spre punctul A .
- forțele de frecare sunt neglijabile comparativ cu acțiunea firului elastic.

Prin aplicarea principiului lui Newton din mecanica clasică rezultă:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad (1.2.1)$$

Modelul matematic care rezultă este o ecuație de evoluție pentru următorul vector de variabile:

$$\mathbf{u} = \left(u_1 = x, u_2 = \frac{dx}{dt} \right) = -kx \quad (1.2.2)$$

Utilizând notațiile de mai sus, ecuația diferențială de ordinul 2 devine:

$$\begin{cases} \frac{du_1}{dt} = u_2 \\ \frac{du_2}{dt} = -\frac{k}{m} u_1 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

Definirea termenului de model matematic implică introducerea următoarelor elemente:

- *Variabile independente*, de obicei spațiul și timpul
- *Variabile de stare*, sau *variabile dependente*, care iau valori în funcție de variabilele independente.

Ca urmare, un **model matematic**, [2], poate fi introdus ca un set de ecuații care definesc evoluția variabilelor de stare în funcție de variabilele independente.

Următoarele definiții sunt propuse [2]:

- Evoluția unui sistem se raportează la *variabile independente*, care, dacă nu sunt specificate în mod diferit, sunt timpul t , definit pe un interval $t \in [t_0, T]$, care se referă la perioada de observare; și spațiul x , din volumul V , care conține sistemul.
- *Variabilele de stare* sunt un vector de variabile de dimensiune finită

$$u = u(t, x): [t_0, T] \times V \rightarrow R^n \quad (1.2.4)$$

unde $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, sunt considerate suficiente pentru a descrie evoluția stării fizice a sistemului în raport cu variabilele independente.

Pentru a manipula în mod corect un model matematic, numărul ecuațiilor și dimensiunea variabilelor de stare trebuie să fie aceeași. În acest caz modelul se numește *consistent*.

1.3. Clasificarea modelelor

Introducând și observațiile experimentale privind un proces, se consideră că un model este un sistem de ecuații matematice care țin cont de toate datele experimentale cunoscute ale procesului studiat. În general, modelele matematice se pot clasifica în, [1]:

- *Modele de cunoștințe*. Ecuațiile acestor modele se obțin scriind legile fizice cărora li se supune sistemul.
- *Modele de simulare*. Ecuațiile se impun apriori fără a lua în considerare mecanismele fizice, iar coeficienții necunoscuți sunt identificați din datele experimentale.

Modelele de cunoștințe țin cont de fenomenele fizico-chimice care au loc în timpul procesului. Ele cer ca procesul să fie perfect cunoscut și ca legile cărora li se supune sistemul să fie exprimate corect. Modelele de

simulare sunt mai puțin exigente. Ele leagă intrarea sistemului de ieșire, pornind de la datele experimentale. Bineînțeles, în realitate avem deseori de-a face cu modele intermediare care se situează între modelele de cunoștințe și modelele de simulare.

După structura lor și tipul variabilelor, modelele matematice pot fi clasificate în diferite moduri, unele dintre acestea sunt redată mai jos:

- *Modele liniare și modele neliniare.* Modelele matematice includ **variabile** - care sunt abstractizări ale cantităților de interes în sistemele pe care le descriu - și **operatori**, care se aplică acestor variabile și care pot fi operatori algebrici, funcții, operatori diferențiali etc. Dacă toți operatorii sunt liniari, atunci modelul matematic este liniar, altfel este neliniar.
- *Modele deterministe și modele stohastice.* Un model determinist este unul în care fiecare set de variabile este unic determinat de parametrii modelului și de seturile de stări anterioare a acestor variabile. De aceea modelele deterministe se comportă la fel pentru un set de condiții inițiale date. Într-un model stohastic sunt prezente comportamente aleatoare și variabilele sunt descrise de probabilități de distribuție.
- *Modele statice și modele dinamice.* Un model static nu ține cont de timp, în timp ce într-un model dinamic variabilele depind de timp. Modele dinamice sunt de obicei reprezentate prin ecuații cu diferențe sau ecuații diferențiale.
- *Modele cu parametri concentrați și modele cu parametri distribuiți.*

Dacă un model este *omogen* (stările sunt consistente în întregul sistem) *modelul are parametri concentrați*. Dacă modelul este *eterogen* (variabilele de stare variază în spațiu și timp în sistem) atunci *modelul este cu parametri distribuiți*, descris de obicei de ecuații cu derivate parțiale.

1.4. Etapele modelării matematice

Procedura

O procedură pentru determinarea unui model matematic pentru un proces dinamic este descrisă mai jos:

1. Definiți frontierele sistemului. Toate sistemele fizice funcționează în interacțiune cu altele. De aceea este necesar să se definească frontierele sistemului înainte de a începe elaborarea unui model matematic pentru acesta. În cele mai multe cazuri, definirea frontierelor este făcută în mod natural.
2. Se fac presupuneri simplificatoare. De exemplu, se poate presupune că temperatura într-un rezervor este aceeași în orice punct.
3. Se scrie legea bilanțului de materiale sau legile fizicii care guvernează fenomenul: *Viteza de schimbare a cantității acumulate este egală cu intrările minus ieșirile plus cantitățile generate.*

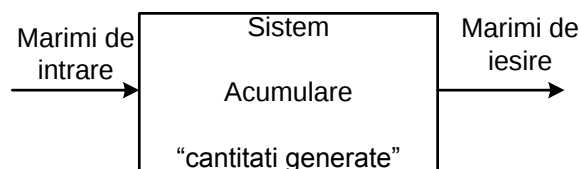


Figura 1-2. Legea bilanțului de materiale

„Cantitate acumulată” este un termen utilizat cu sens general. Poate reprezenta masă, moli, energie, moment, sarcină electrică. “Cantități generate” poate însemna de exemplu o cantitate de materiale generată în urma unor reacții chimice, sau energie generată de un reactor exoterm. Legea bilanțului de materiale poate fi exprimată matematic după cum urmează:

$$\frac{d[\text{acumulare}]}{dt} = \text{Intrari} - \text{Iesiri} + \text{cantitati generate}$$

Din legea bilanțului de materiale rezultă una sau mai multe ecuații diferențiale. La acestea se pot defini condiții adiționale, cum ar fi de exemplu cerința ca masa de lichid dintr-un rezervor să nu fie negativă. Pentru a calcula cantitățile acumulate în sistem din model, ecuațiile rezultate trebuie integrate, probabil utilizând un program sau un mediu de simulare.

4. Se elaborează o schemă bloc în care se arată intrările, ieșirile și parametrii. O astfel de reprezentare face ca modelul să apară în mod mai clar.

În Figura 1-3 se prezintă un exemplu de schema bloc a unui sistem cu două variabile de intrare, una de ieșire, doi parametri și două variabile de mediu (perturbații).

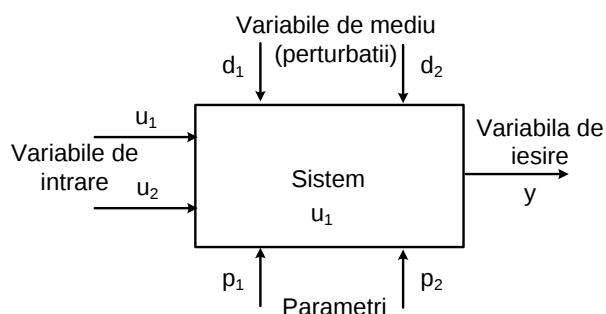


Figura 1-3. Schema bloc

Variabila de ieșire este de obicei cantitatea acumulată, Variabilele de intrare sunt de obicei separate în variabile care pot fi manipulate sau ajustate (de exemplu unui element de încălzire) și variabile care nu pot fi manipulate, aparțin mediului înconjurător și sunt denumite perturbații (de exemplu temperatura mediului înconjurător). Parametrii unui model sunt cantități care în mod obișnuit (dar nu obligatoriu) au valori constante, cum sunt de exemplu densitatea unui lichid sau constanta elastică a unui resort. Pentru a simplifica o schemă bloc, în mod obișnuit nu se reprezintă parametrii unui sistem.

5. Prezentarea modelului într-o formă adecvată. Cele mai utilizate moduri de prezentare a modelelor sunt diagramele bloc, modele de stare sau funcții de transfer. Alegerea modului de prezentare a unui model depinde de scopul urmărit. De exemplu, dacă scopul este acordarea unui regulator PID, este necesară o funcție de transfer.

Exemplul 1.4.1. Modelarea unui rezervor cu lichid

În Figura 1-4, se prezintă un rezervor cu lichid cu alimentare și scurgere. Se presupune că alimentarea cu lichid a rezervorului poate fi controlată cu ajutorul unei pompe, iar ieșirea nu este controlată. Densitatea lichidului este aceeași în orice punct din interior, precum și la intrarea și ieșirea din rezervor. Se presupune că rezervorul are pereții verticali.

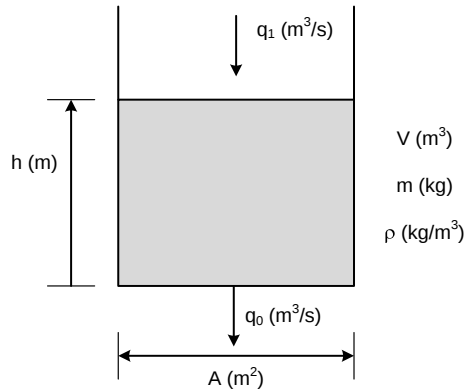


Figura 1-4. Rezervor cu lichid

Notațiile din figură sunt:

q_0, q_i – fluxul volumetric al lichidului de alimentare și de ieșire (m^3/s)

h – înălțimea lichidului în rezervor (m)

A – aria secțiunii transversale (m^2)

V – volumul de lichid (m^3)

m – masa (kg)

ρ – densitatea (kg/m^3)

Debitele q_i și q_0 și masa de lichid din rezervor sunt variabile.

Parametrii A și ρ sunt presupuși a fi constanți.

Vom scrie un model care să exprime cum variază masa de lichid în funcție de timp.

Se scrie bilanțul de masă din rezervor:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho q_i(t) - \rho q_0(t) \quad (1.4.1)$$

Ecuția (1.1) este o ecuație diferențială pentru m . O condiție adițională este $m \geq 0$. Ecuția este un model matematic al problemei, unde ρ este parametru.

Dacă este util să de determine cum variază nivelul lichidului în rezervor, se scrie relația care face corespondența între nivelul h și masa m :

$$m(t) = \rho V(t) = \rho A h(t) \quad (1.4.2)$$

Ecuția (1.2) se introduce în (1.1) și rezultă:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \frac{d\rho V(t)}{dt} = \frac{d\rho A h(t)}{dt} = \rho A \frac{dh(t)}{dt} = \rho q_i(t) - \rho q_0(t) \quad (1.4.3)$$

sau:

$$\frac{dh(t)}{dt} = \dot{h}(t) = \frac{1}{A} q_i(t) - q_0(t) \quad (1.4.4)$$

cu condiția $h_{\min} \leq h(t) \leq h_{\max}$.

Reguli generale și observații privind procesul de modelare matematică

Informația care trebuie colectată, sortată, evaluată și organizată pentru determinarea unui model matematic este reprezentată ca nodurile diagramei din Figura 0-5, [9].

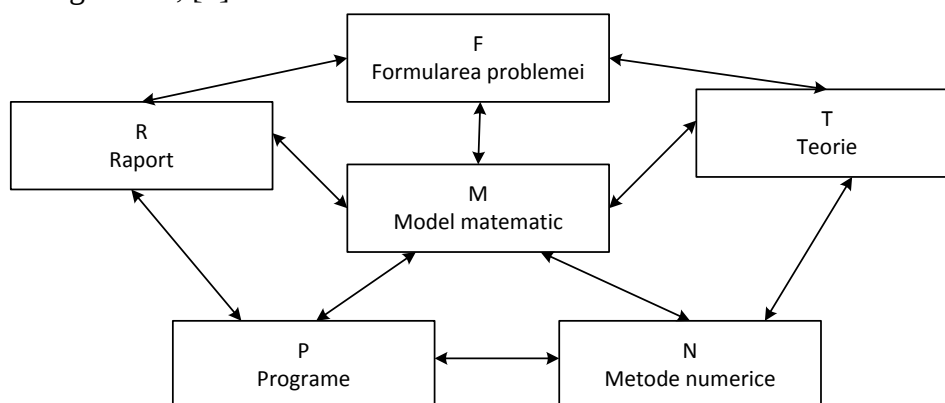


Figura 0-5. Fluxul informațiilor relevante

Conexiunile din diagramă sunt activități cu comunicare în două direcții (fluxul informațiilor relevante) între noduri și sursele de informație corespunzătoare.

- **F. Formularea problemei:** se bazează pe obiectivul urmărit, cerințele problemei, scopul pentru care se dorește modelul. Câteodată este incompletă sau ambiguă și cerințele pot fi contradictorii.
- **M. Modelul matematic:** include concepte/variabile, relații, obiective, priorități, cerințe de calitate.
- **T. Teoria:** include conceptele teoretice și matematice ale aplicației, studiul de literatură
- **N. Metode numerice:** utilizarea librăriilor software pentru rezolvarea problemelor rezultate
- **P. Programe:** proiectarea schemelor bloc, implementarea aplicațiilor, interfețe utilizator, documentație
- **R. Raport:** descrierea, analiza, rezultatele și validarea modelului, vizualizare, limitări, recomandări

Diagrama împarte sarcina de modelare în 16 (6+10) procese diferite. Fiecare dintre cele 6 noduri și fiecare dintre cele 10 legături necesită atenție

repetată de obicei în fiecare stadiu al procesului de modelare. Modelarea este completă numai dacă traficul de informații între noduri devine nesemnificativ.

În mod frecvent, [9], problema se schimbă în timpul modelării, în lumina înțelegerii obținute prin procesul în sine. La sfârșit, chiar și o descriere inițială a problemei care a fost contradictorie ar trebui să se modifice într-una bine formulată, cu un model matematic asociat definit în mod corect.

Reguli generale:

- Studiați modul în care alții au rezolvat problemel similare; adaptați modelele situației prezente.
- Colectați informații fundamentale necesare pentru înțelegerea problemei.
- Începeți cu modele simple; adăugați detalii după cum sunt necesare sau utile.
- Determinați mărimile relevante și descrieți-le în mod corect.
- Determinați toate relațiile între mărimi (ecuații diferențiale, inegalități, etc)
- Colectați datele necesare pentru relații
- Determinați restricțiile la care mărimile din model trebuie să se supună (restricții de semn, suprapuneri, saturații, etc).
- Determinați toate obiectivele (chiar și cele conflictuale)
- Sortați informațiile relevante după gradul de impact așteptat.
- Creați o ierarhie a modelelor: de la cele simple la modele complexe care includ toate detaliile cunoscute.
- Rezolvați întâi modelele simple (chiar dacă nu sunt foarte precise) pentru a obține puncte de plecare pentru modelele mai rafinate și realiste.
- Soluțiile perfecte pot fi rar obținute. Modelarea este arta găsirii unui compromis satisfăcător.

La fel cum nu există unicitate în aproximarea unei funcții sau în metoda numerică de rezolvare a unei ecuații, unicitatea unui model nu are sens. Toate modelele care țin cont de datele experimentale sunt convenabile. Modelele aceluiași sistem diferă deoarece sunt bazate pe aproximări inițiale diferite. Ele mai pot diferi și în măsura în care țin cont de datele care privesc

fenomenul. Obiectivul care trebuie atins va justifica structura modelului final. Este evident că vom căuta să obținem modelul cel mai simplu, adică cel care este descris de ecuațiile cele mai simple de rezolvat. Singura restricție care trebuie impusă unui model este utilitatea sa.

Modelele sunt legate de proces în mod indisolubil, deci nu pot fi tratate izolat de acesta. Relația între model și proces este una dinamică și cere o continuă interacțiune dacă se caută să se obțină un progres conceptual sau înțelegerea fenomenului.

Revizuirea și dezvoltarea modelelor nu trebuie făcută în mod necesar în direcția creșterii complexității sau a măririi numărului de parametri. Progresul poate fi în direcția simplificării și reducerii numărului de constante care trebuie identificate (Figura 1-6).

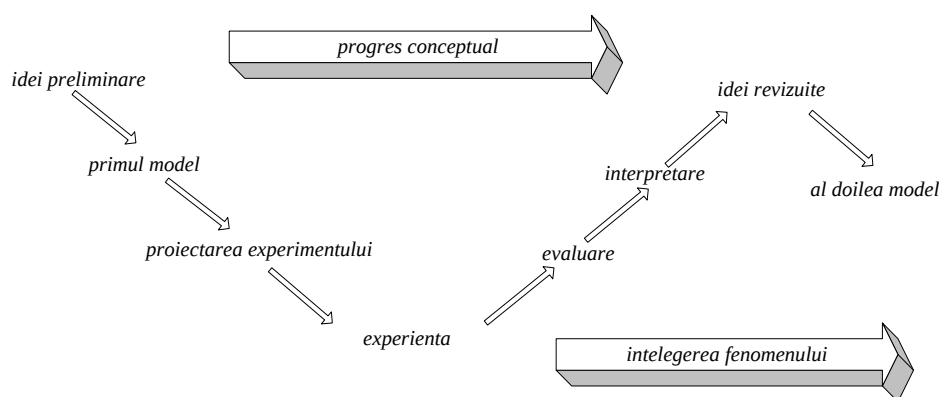


Figura 1-6. Procesul modelării matematice, [1]

Câteva remarci pot clarifica aspectele prezentate în introducere:

- Toate sistemele reale pot fi observate și reprezentate la scale diferite prin ecuații matematice. Selecția unei scale în raport cu alta se face pe de o parte în funcție de strategia celui care elaborează modele matematice și pe de alta, în funcție de specificul aplicării modelului
- Sistemele din lumea reală sunt în general neliniare. Caracterul liniar trebuie privit fie ca și un caz special, sau ca o aproximare a realității fizice. Atunci metodele de analiză neliniară trebuie să fie dezvoltate pentru a trata aplicațiile modelului. Sunt necesare metode numerice de calcul pentru a rezolva problemele matematice generate de aplicarea modelelor și analiza și interpretarea sistemelor reale.

- Metodele computaționale pot fi dezvoltate numai după o analiză aprofundată a proprietăților calitative ale modelului și a problemelor matematice legate de el. Pentru modele diferite corespund metode diferite.
- Modelarea este o știință care necesită abilități creative legate strâns de o întreagă varietate de metode ale matematicii aplicate. Întrădevăr, proiectarea unui model trebuie să fie legată în mod precis de metodele care vor fi utilizate pentru a trata problemele matematice generate de model.