
**THERMOMECHANIQUE
ET MODELISATION
DU COMPORTEMENT DES
MATERIAUX**

**Alain GERARD, Céline GERARD, Olivier CAHUC,
Miron ZAPCIU, Claudiu BISU**

THERMOMECHANIQUE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT DES MATERIAUX

**A. GERARD^{A1}, C. GERARD^{B3}, O. CAHUC^{A2},
M. ZAPCIU^{C4}, C. BISU^{C5}**

^AUniversité de Bordeaux (Bordeaux1) et CNRS UMR 5295, I2MI Département MPI, 351 cours de la Libération, 33405 Talence, France,

¹Prof., Dr, e-mail: alain.gerard@u-bordeaux1.fr, ²Prof., Dr, e-mail: olivier.cahuc@u-bordeaux1.fr

^BDepartment of Physics and Astronomy, Uppsala University, Box 516, SE-75120, Uppsala, Sweden.

³Dr., Eng., email : celine.gerard@physics.uu.se

^CUniversity POLITEHNICA of Bucharest, Department MSP, 313 Splaiul Independentei, 060042, Bucharest, Romania.

⁴Prof., Dr, Eng., e-mail: miron.zapciu@upb.ro, ⁵Dr, Eng. Lecturer, e-mail: claudiu.bisu@upb.ro

TABLE

AVANT

Chapitr

1.1 Ra

1.1

1.1

1.2 TH

1.2

2.2

1.3 M

1.3

1.3

1.4 T

Chapitr

2.1 L

2.1

2.1

2.2 D

2.3 N

Chapitr

3.1 V

3.1

3.1

3.2 P

3.2

3.2

3.3 I

3.3

3.3

3.3

3.3

3.4 I

3.3

3.3

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES.....	5
AVANT PROPOS.....	11
Chapitre 1. Méthode des puissances virtuelles	16
1.1 Rappels	16
1.1.1 Mouvement virtuel d'un système S à l'instant t	16
1.1.2 Représentation des efforts (représentation fonctionnelle)	17
1.2 Théorie du premier gradient.....	19
1.2.1 Généralités.....	19
1.2.2 Enoncé des puissances virtuelles.....	20
1.3 Milieux curvilignes.....	22
1.3.1 Les équations générales.....	22
1.3.2 Interprétation.....	24
1.4 Théorie naturelle des plaques	25
Chapitre 2. Enoncés fondamentaux et premier principe	30
2.1 Les lois de conservation et Premier Principe.....	30
2.1.1 Lois de conservation.....	30
2.1.2 Le Premier Principe	32
2.2 Deuxième Principe : inégalité de Clausius-Duhem.....	33
2.3 Nécessité des lois de comportement.....	35
Chapitre 3. Méthode de l'état local : lois d'état.....	37
3.1 Variables d'état.....	37
3.1.1 Variables observables.....	37
3.1.2 Variables internes.....	38
3.2 Potentiel thermodynamique : lois d'état.....	38
3.2.1 Hypothèse de l'état local	38
3.2.2 Lois d'état.....	39
3.3 Dissipation : Lois complémentaires.....	41
3.3.1 Dissipation intrinsèque : dissipation thermique	41
3.3.2 Potentiel de dissipation.....	42
3.3.3 Hypothèses simplificatrices.....	45
3.3.4 Découplage des dissipations : dissipations intrinsèque et thermique.....	45
3.4 Eléments de thermique	48
3.4.1 Loi de Fourier	48
3.4.2 Equation de la chaleur	48
3.4.2.1 Propagation de la chaleur	49

3.4.2.2 Echauffement adiabatique	50
Chapitre 4. Principes spécifiques aux lois de comportement	51
4.1 Forme générale.....	51
4.2 Principe de l'indifférence matérielle (ou d'objectivité)	52
4.3 Théorèmes de représentation	53
4.4 Indétermination due à des liaisons internes.....	55
4.5 Autres éléments susceptibles d'intervenir.....	56
4.5.1 Les solides simples anisotropes.....	56
4.5.1.1 Généralités	56
4.5.1.2 Textures et cristaux.....	56
4.5.1.2.1 Les classes cristallines.....	56
4.5.1.2.2 Les textures	57
4.5.2 Les anisotropies.....	58
4.5.2.1 Anisotropie de structure	58
4.5.2.1.1 Anisotropies de structure morphologique.....	58
4.5.2.1.2 Anisotropie de structure cristallographique	59
4.5.3 Anisotropie de discontinuités.....	59
4.5.4 Anisotropie de formation	59
4.5.5 Différents domaines de l'anisotropie mécanique : anisotropies continue et discontinue	59
4.6 Représentation des fonctions tensorielles anisotropes de deux tenseurs symétriques du second ordre.....	60
4.6.1 Représentation des fonctions tensorielles orthotropes	60
4.6.2 Représentation des fonctions tensorielles orthotropes de révolution.....	61
4.6.3 Représentation des fonctions tensorielles orthotropes à deux dimensions	62
Chapitre 5. Comportement Fluide	64
5.1 Fluides compressibles classiques	64
5.1.1 Données thermodynamiques	64
5.1.2 Lois complémentaires.....	66
5.1.3 Cas particuliers des fluides parfaits	68
5.2 Fluides proprement dits.....	69
Chapitre 6. Comportement élastique	71
6.1 Elasticité linéaire	71
6.1.1 Phénoménologie.....	71
6.1.2 Hypothèses	72
6.1.3 Choix des variables.....	72
6.1.4 Construction du potentiel Ψ	72
6.2 Cas particuliers de l'élasticité classique.....	73
6.3.1 Choix des variables.....	75
6.3.2 Construction du potentiel.....	75
6.3.3 Loi de comportement.....	76
6.3.4 Cas du comportement adiabatique.....	76

6.3.5
Chapitre
7.1 Re
7.1.1
7.1.1
7.1.1
7.1.1
7.1.1
7.2 La
7.3 Te
7.4 Et
7.5 Ex
7.6 De
7.7 Te
7.8 M
7.8
7.8
7.8
7.8
Chapit
8.1 H
8.1
8.1
8.2 H
8.2
8.2
8.2
8.3 H
8.4 H
8.5 H
Chapi
9.1
9
9
9
9.2
9.3

5	6.3.5 Calcul du coefficient de chaleur spécifique à contrainte constante C_σ	77
5	Chapitre 7. Description des grandes déformations	78
5	7.1 Représentation des mouvements	78
5	7.1.1 L'application \mathcal{F}	78
5	7.1.1.1 Définition	78
5	7.1.1.2 Interprétation	79
5	7.1.2 Représentation analytique.....	79
5	7.1.2.1 Description Lagrangienne	80
5	7.1.2.2 Description Eulérienne	80
5	7.2 La transformation linéaire tangente	81
5	7.3 Tenseur des déformations.....	85
5	7.4 Etude des propriétés métriques de F : tenseur des dilatations	86
5	7.5 Extensions et rotations	89
5	7.6 Décomposition polaire de l'application linéaire tangente	90
5	7.7 Tenseurs des déformations.....	92
5	7.8 Milieux hyperélastiques	96
5	7.8.1 Cas général.....	96
5	7.8.1.1 Conséquences et vérification	96
5	7.8.1.2 En conclusion	97
5	7.8.2 Cas incompressible.....	98
5	7.8.3 Cas isotrope.....	98
5	7.8.4 Matériau de Mooney - Rivlin	100
60	Chapitre 8. Loi de comportement en milieux poreux.....	102
60	8.1 Introduction.....	102
61	8.1.1 Méthodes d'homogénéisation.....	102
61	8.1.1.1 Principe de moyenne	102
61	8.1.1.2 Milieux périodiques.....	103
61	8.1.2 Méthode de l'état local	103
61	8.2 Hypothèses et variables	104
61	8.2.1 Hypothèses	104
61	8.2.2 Choix des variables.....	105
61	8.3 Potentiel.....	105
61	8.4 Interprétation des coefficients	107
61	8.5 Pseudo-potentiel des dissipations.....	108
64	Chapitre 9. Comportement Viscoélastique.....	110
64	9.1 Viscoélasticité linéaire.....	110
64	9.1.1 Phénoménologie.....	110
64	9.1.2 Modèle rhéologique de Kelvin - Voigt.....	111
64	9.1.3 Formulation thermodynamique	112
64	9.1.3.1 Choix des variables.....	112
64	9.1.3.2 Construction des potentiels.....	112
64	9.2 Viscoélasticité linéaire isotrope.....	114
64	9.3 Formulation duale : milieu de Maxwell.....	114

9.3.1	Modèle rhéologique de Maxwell.....	114
9.3.2	Formulation thermodynamique.....	115
9.3.3	Remarques générales pour la viscoélasticité :.....	117
Chapitre 10. Comportement plastique.....		119
10.1	Phénoménologie.....	119
10.2	Modèles rhéologiques classiques.....	123
10.2.1	Solide rigide parfaitement plastique.....	124
10.2.2	Solide élastoplastique parfaitement plastique.....	124
10.2.3	Solide rigide plastique avec écrouissage linéaire.....	125
10.2.4	Solide élastoplastique avec écrouissage linéaire.....	126
10.3	Espace des contraintes et notion de seuil.....	128
10.4	Formulation de la loi de comportement.....	130
10.5	Fonctions seuil.....	133
10.5.1	Hypothèse de l'incompressibilité plastique.....	133
10.5.2	Fonctions seuils usuelles.....	134
10.5.3	Cas rigide plastique.....	136
10.6	Milieux viscoplastiques : fluide de Bingham.....	137
Chapitre 11. Comportement élasto-plastique.....		139
11.1	Schématisation.....	139
11.1.1	Écrouissage isotrope.....	140
11.1.2	Écrouissage cinématique.....	140
11.2	Loi de comportement.....	141
11.2.1	Choix des variables et hypothèses.....	141
11.2.2	Loi d'état.....	142
11.3	Cas d'un écrouissage isotrope avec seuil de von Mises.....	145
11.4	Théorie de Hencky ou de chargement radial.....	147
11.5	Modèle standard à seuil d'écrouissage de von Mises.....	148
11.5.1	Cas de l'écrouissage isotrope.....	148
11.5.2	Cas d'un écrouissage cinématique avec seuil de von Mises.....	149
Chapitre 12. Endommagement.....		151
12.1	Introduction.....	151
12.2	Description de l'endommagement des matériaux classiques.....	154
12.2.1	Métaux.....	154
12.2.2	Roches et bétons.....	156
12.2.2.1	Les roches.....	156
12.2.2.2	Le béton.....	157
12.2.3	Composites à matrice organique.....	159
12.2.4	Composites à matrice céramique.....	160
12.3	Approche mécanique unidimensionnelle.....	162
12.3.1	Choix des variables.....	162
12.3.2	Principe de la contrainte effective.....	163
12.4	Formulation thermomécanique.....	164

12.4

X.....

12.4

12.5 C

12.6 C

12.7 E

12.

12.

12.

12.8 E

12.9 E

.....

12.

12.

12.

12.

12.

12.1

12.

12.

12.

.....

Chapit

.....

13.1

13.2

13.

13.

13.3

mét

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

1

Anne

112	12.4.1 Equivalence en déformation.....	164
113	X.....	164
117	12.4.2 Equivalence en contrainte.....	166
119	12.5 Généralisation au cas tridimensionnel	166
119	12.6 Critère de rupture.....	168
123	12.7 Lois complémentaires d'évolution.....	169
124	12.7.1 Dissipation.....	169
124	12.7.2 Cas des solides élastiques endommageables.....	169
125	12.7.3 Cas des solides élastoplastiques endommageables.....	171
126	12.8 Matériau parfaitement fragile.....	173
128	12.9 Endommagement surfacique: exemple de la corrosion sous contrainte	178
130	12.9.1 Introduction.....	178
133	12.9.2 Aspects phénoménologie de l'endommagement par corrosion sous	
133	contrainte.....	179
134	12.9.3 Aspect théorique.....	180
136	12.9.4 Résultats expérimentaux.....	182
137	12.10 Endommagement par l'eau.....	183
139	12.10.1 Equations de base.....	184
139	12.10.2 Enthalpie libre: équivalence en contrainte.....	185
140	12.10.3 Cas de la diffusion unidirectionnelle sous charge transverse constante	
140	188

$$R_3 = \left[-\frac{\partial^2 b_2}{\partial m \partial D} + \frac{\partial^2 b_3}{\partial m \partial D} D \right] \frac{\sigma_0}{\sigma_f}, \bar{D} = d_{[31]}^2 + d_{[32]}^2 \quad \dots 189$$

Chapitre 13. Mélange et changement de phase en mécanique des solides

145	192
147	13.1 Introduction.....	192
148	13.2 Mélange eau-glace avec changement de phase	193
148	13.2.1 Choix des variables.....	194
149	13.2.2 Choix de l'énergie libre.....	194
151	13.3 - Changement de phase martensite-austénite dans les alliages	
151	métalliques : matériaux à mémoire de forme.....	198
154	13.3.1 Introduction.....	198
154	13.3.2 Choix des variables.....	199
156	13.3.3 Energie libre.....	200
156	13.3.3.1 Choix de ψ	200
157	13.3.3.2 Dissipation.....	202
159	13.3.3.3 Comportement non dissipatif.....	204
160	13.3.3.3.1. Basse température ($T < T_0$).....	205
162	13.3.3.3.2. Température « moyenne » ($T_0 < T < T_c$).....	206
162	13.3.3.3.3. Haute température ($T > T_c$).....	207

Annexe A. Rappels d'analyse tensorielle..... 209

A.1 Géométrie euclidienne	20
A.1.1 Vecteurs.....	20
A.1.2 Base	20
A.2 La convention de l'indice muet.....	21
A.3 Changement de base dans E.....	21
Annexe B. Tenseurs	21
B.1 Définitions et propriétés élémentaires	21
B.1.1 Définition.....	21
B.1.2 Espace vectoriel des tenseurs du second ordre.....	21
B.1.3 Forme bilinéaire associée à un tenseur du second ordre	21
B.2 Tenseurs d'ordre supérieur	21
B.3 Changement de base.....	21
B.4. Opérations sur les tenseurs.....	21
B.4.1. Multiplication tensorielle	21
B.4.2 Contraction.....	21
B.4.3. Transposition	21
B.5 Tenseur d'orientation.....	21
B.5.1. Définition.....	21
B.5.2 Formulaire	21
B.5.3 Décomposition canonique d'un tenseur du second ordre.....	21
Annexe C. Formules d'analyses vectorielle et tensorielle.....	21
Annexe D. Rappels d'analyse convexe	221
D.1. Définitions et propriétés élémentaires	221
D.1.1. Ensembles convexes.....	221
D.1.1.1 Définitions.....	221
D.1.1.2 Propriété.....	221
D.1.2 Interprétations	221
Annexe E. Annexe du chapitre 5.....	224
E.1 Cas de l'orthotropie à trois dimensions.....	224
E.1.1 Expressions des douze tenseurs-générateurs	224
E.1.2 Expressions des dix-neuf invariants.....	225
E.2 Cas de l'orthotropie de révolution.....	226
E.2.1 Treize tenseurs-générateurs.....	226
E.2.2 Expressions des quatorze invariants.....	228
E.3 Cas de l'orthotropie à deux dimensions	228
E.3.1 Expressions des invariants (dans \vec{V}_2, \vec{V}_3).....	229
E.3.2 Expressions des invariants	229
RÉFÉRENCES.....	230

Prédire l
soumis in

• le
in

• le
ex

Pour ré
puissanc
l'ensem
la mod
l'observ
permett

L'expé
s'allong
système
s'accom
d'un fil
(échauf
raisonn
un pur
le siège

A parti
thermo
partie,

En phy
but es
les lo
évolut
envisa

AVANT PROPOS

Prédire l'évolution d'un milieu continu en fonction des actions auxquelles il est soumis impose de connaître à minima :

- les équations du mouvement, les conditions aux limites et les conditions initiales du système en mouvement,
- les lois de comportement liant certaines grandeurs entre elles comme par exemple, en régime élastique, la contrainte et la déformation.

Pour répondre au premier point il existe une méthode générale, celle des puissances virtuelles. Elle permet selon le degré de raffinement souhaité, d'établir l'ensemble des équations de mouvement et les conditions aux limites associées à la modélisation retenue ; les conditions initiales étant données à partir de l'observation. Se pose alors la question : existe-t-il une méthode générale permettant de répondre au second point ?

L'expérience physique la plus immédiate montre qu'une barre métallique chauffée s'allonge. Une déformation peut donc être produite par apport de chaleur au système ou par variation de température. Corrélativement, toute déformation s'accompagne normalement d'effets thermiques. Des cycles de pliage et dépliage d'un fil de fer, qui conduisent à sa rupture, en sont une illustration bien connue (échauffement important dans la zone d'action). Souvent, il n'est donc pas raisonnable d'espérer pouvoir décrire le comportement d'un milieu continu avec un pur schéma mécanique ignorant les interactions thermomécaniques dont il est le siège.

A partir des résultats expérimentaux qui guident le choix des variables à utiliser, la thermodynamique des milieux continus peut permettre de répondre, au moins en partie, au second point évoqué ci-dessus.

En physique, est habituellement appelé « Thermodynamique » la discipline dont le but est de dégager les notions de température absolue, d'entropie et, de formuler les lois qui relient ces grandeurs. En fait, seuls les états d'équilibre ou les évolutions excessivement lentes voisines d'un état d'équilibre sont classiquement envisagées. Ce n'est que dans le courant de la seconde moitié du siècle dernier

(années 1960) que le cas des déformations finies des systèmes en mouvement a retenu l'attention. Aussi, il semble préférable de réserver le terme thermostatique à l'étude des états (ou suite d'états) d'équilibre pour conserver au terme « thermodynamique » son sens littéral et de l'appliquer à la discipline qui propose l'étude générale des transformations continues qui prennent naissance dans un milieu en mouvement.

Nous avons choisi de suivre une voie plutôt didactique et de présenter un ouvrage qui s'appuie sur la thermostatique, considérée comme acquise. Nous commençons au chapitre 1 par revoir succinctement le principe des puissances virtuelles. Ce principe est issu des notions très intuitives des mouvements virtuels. C'est ce qui a rendu difficile sa conceptualisation. Pourtant lorsque vous voulez vérifier si la courroie de l'alternateur, ou de la pompe à eau, de votre voiture est suffisamment tendue que faites-vous ? Vous la déplacez perpendiculairement à sa direction de mouvement. Pour savoir si une valise est lourde vous la déplacez verticalement. Dans tous ces exemples, nous faisons travailler les efforts intérieurs de tension des courroies ou des efforts extérieurs de pesanteur. La démarche proposée est donc tout à fait pertinente et, particulièrement puissante pour permettre de préciser les équations de mouvement qui régissent les déplacements d'un système et de déduire les conditions aux limites qui sont associées à ces déplacements. Il en sera donné une application à la théorie des milieux continus à une dimension (milieux curvilignes) puis deux dimensions (plaques).

Nous continuons (chapitre 2) par un bref rappel de thermostatique. Il s'agit là essentiellement de préciser nos notations, de rassembler les éléments, généralement bien connus de la « thermodynamique » et de mettre ainsi en place des outils nécessaires à la démarche proposée pour aboutir à l'écriture des lois de comportement d'un milieu continu quelconque en mouvement.

Le chapitre 3 présente la théorie de « l'état local ». Celle-ci repose sur des principes généraux qui permettent de construire les lois de comportement prenant en compte les effets thermodynamiques. La théorie développée a l'avantage de partir des connaissances acquises en thermostatique du milieu étudié, ce qui permet de formuler des lois d'état. Mais celles-ci sont insuffisantes, il faut y ajouter des lois complémentaires qui, en règle générale, peuvent se formuler à partir de l'analyse de la dissipation. Nous utiliserons essentiellement les mécanismes dissipatifs normaux qui généralisent assez naturellement les lois de la thermodynamique des processus irréversibles (TPI). En bref, le comportement d'un milieu continu se trouve décrit essentiellement par deux fonctions à valeurs réelles douées de propriétés de convexité : un potentiel de dissipation et un pseudo-potentiel (ou une fonction) de dissipation. En outre nous nous restreignons

au cas des systèmes dits fermés. Cependant, des indications sont données quant à la manière d'aborder les systèmes ouverts. Quelques exemples sont donnés dans le cas des milieux poreux (chapitre 8) ou de l'endommagement des composites par l'eau (chapitre 12). Finalement les concepts de base sont abordés dans les trois premiers chapitres, les chapitres suivants pouvant être considérés comme des illustrations de ceux-ci.

Il est bien connu qu'une loi de comportement relie les contraintes aux déformations subies par le matériau. C'est elle qui prend en compte la nature du matériau. C'est donc l'endroit où les mathématiques doivent permettre de refléter la réalité physique. Plus généralement, il est donc nécessaire de savoir quels sont les éléments mathématiques à utiliser pour décrire tels ou tels phénomènes physiques, et réciproquement. Ainsi le comportement d'un matériau doit rester le même quel que soit le repère dans lequel il est observé, et il doit être tenu compte des propriétés de symétrie éventuelle du matériau, de son isotropie ou anisotropie, etc. Dans le respect de ces propriétés, nous pourrons écrire (chapitre 4) les lois de comportement et les modèles mathématiques à utiliser pour transcrire certaines réalités physiques des matériaux.

Le chapitre 5 permet une première mise en œuvre des principes dégagés aux chapitres 2 et 3. Nous commençons par les milieux continus les plus simples, à savoir les milieux fluides. D'un point de vue thermodynamique, un fluide est un milieu dont l'état peut être caractérisé par seulement deux variables. Par ailleurs, on connaît de manière très précise les expressions des potentiels qui permettent de décrire l'ensemble des propriétés thermostatiques des fluides usuels. Un cas particulier remarquable est celui où le fluide est un gaz parfait. En mécanique des fluides classiques, les relations complémentaires de la loi d'état, nécessaires pour d'écrire le comportement, s'obtiennent par application des principes de la thermodynamique des phénomènes irréversibles ; c'est-à-dire à partir d'une expression de la dissipation sous une forme « quadratique » par rapport à certaines variables.

L'élasticité est abordée au chapitre 6. C'est le modèle de comportement solide le plus simple et le plus connu. C'est donc un bon exemple d'utilisation de la théorie développée aux chapitres précédents. Les cas de l'élasticité classique puis de la thermoélasticité classique permettent de préciser les notations utilisées dans l'ouvrage. C'est le lieu choisi pour montrer de manière approfondie la démarche à suivre dans des cas plus complexes. C'est aussi le lieu où sont rassemblées quelques notions classiques considérées comme acquises.

Les hypothèses de petites perturbations autour d'un état d'équilibre sont de bonnes approximations intéressantes mais très grossières et peu représentatives de situations courantes de la vie des matériaux et/ou des structures. Il suffit de penser au laminage d'une tôle ou à son emboutissage pour s'en convaincre. Aussi le chapitre 7 donne les éléments nécessaires pour dominer ces situations. Après la représentation analytique des grandes déformations, sont présentées l'application linéaire tangente et ses conséquences (les divers tenseurs de Green-Lagrange d'Almansi-Euler, etc.). Il est également donnée une application aux milieux hyperélastiques, de Mooney-Rivlin (ce dernier représente assez bien le comportement des caoutchoucs).

Le chapitre 8 aborde succinctement le couplage des milieux élastiques et fluides au travers des milieux poreux. Nous décrivons le cas simple d'un milieu poreux saturé d'un fluide. Son comportement est décrit dans le cas simple du milieu élastique dont les pores occlus sont saturés en fluide.

La théorie générale est appliquée au chapitre 9 dans le cas des milieux qui présentent des réponses retardées par rapport aux sollicitations qu'ils subissent. Ces effets de retard sont la conséquence des effets du temps sur le comportement de ces matériaux dits viscoélastiques. C'est aussi les premiers milieux dissipatifs que nous rencontrons dans ce livre. Par souci de simplification, nous nous limitons au cas linéaire.

Le cas des effets de mémoire des matériaux métalliques est abordé aux chapitres 10 et 11 qui traitent de la plasticité et de l'élastoplasticité. Nous y développons des applications de la dissipation et présentons une première ébauche de la construction du pseudo-potentiel des dissipations.

Le comportement des matériaux présente souvent un affaiblissement de leurs caractéristiques de tenue mécanique aux sollicitations qu'ils supportent. C'est ce qui est examiné au chapitre 12 sous le vocable d'endommagement. Cette terminologie est définie précisément avant de présenter la phénoménologie comportementale de divers matériaux (métaux, roches, bétons, composites, etc.). Une approche analytique des comportements endommagés de ces divers matériaux, sous l'effet de causes variées (contraintes, corrosion, eau...), est ensuite abordée.

Enfin, les variables d'état, généralement internes, doivent parfois respecter certaines contraintes pour décrire le comportement des matériaux. A titre d'exemple, nous citerons les matériaux à mémoire de forme, les mélanges et les changements de phases. Cet aspect est pris en compte dans le chapitre 13 consacré

au changement de phase eau-glace et à une première modélisation du comportement des matériaux à mémoire de forme.

La base de cet ouvrage est inspirée des enseignements de Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) de Mécanique dispensés à l'Université de Bordeaux 1, puis diverses Ecoles d'Ingénieurs, en particulier MATMECA de Bordeaux. Cette base a également servi, en partie, de support aux enseignements du MASTER recherche (2^{ème} année de MASTER) Double diplôme Université Bordeaux 1 - Université Polytechnique de Bucarest.

Ce livre s'adresse naturellement aux étudiants en 2^{ème} année de Master, Elèves des Grandes Ecoles, Chercheurs et Ingénieurs.

Enfin, je suis conscient d'avoir bénéficié tant à l'Université de Bordeaux, qu'à l'Université Polytechnique de Bucarest, d'un environnement très favorable, de collègues et d'étudiants avec lesquels j'ai eu des discussions très bénéfiques et qui m'ont encouragé à participer à la présente rédaction collective. Je ne peux citer ici tous ceux qui ont bien voulu me faire bénéficier de leurs conseils ou de leurs remarques judicieuses et pertinentes. Ma gratitude s'adresse également à l'Academy of Romanian Scientists (AOSR) pour son soutien financier et le soin apporté à l'impression de ce livre.

Pour conclure, je tiens à remercier tout particulièrement mon épouse, Jacqueline, pour son soutien et son aide dans la tâche si ingrate de la relecture.

Novembre 2011,

A. Gérard

Professeur Emérite
Université de Bordeaux
CNRS UMR 5295

Chapitre 1. Méthode des puissances virtuelles

Les notions de mouvements virtuels, vitesses ou déplacements, qui conduisent aux puissances ou travaux virtuels, sont intuitives rendant difficile leur conceptualisation. La démarche qui est proposée ci-dessous, comme nous le verrons au cours de ces pages, est particulièrement adaptée pour préciser les équations de mouvement qui régissent les déplacements d'un système, et déduire les conditions aux limites qui sont associées à ces déplacements.

1.1 Rappels

La méthode des puissances virtuelles (PV) est une approche fonctionnelle qui lie deux espaces : celui des efforts $\{ F \}$ à celui des mouvements virtuels $\{ U^* \}$ par leur produit scalaire qui est un nombre réel noté P^* . Ce nombre réel P^* est une forme linéaire sur $\{ U^* \}$, notée \mathcal{L} .

1.1.1 Mouvement virtuel d'un système S à l'instant t

Soit un système S repéré dans un référentiel R ($O ; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$), et M une particule de ce système (figure 1.1).

Définition 1 : Dans un référentiel R , un mouvement virtuel d'un système S est défini à l'instant t fixé, dès lors qu'un champ de vecteurs \vec{U}^* , défini sur la configuration S^t , est donné. Le vecteur $\vec{U}^*(M)$ de ce champ \vec{U}^* en M , est appelé « vitesse virtuelle » dans R de la particule M de S à l'instant t .

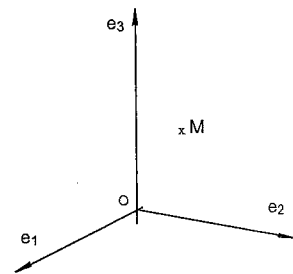


Figure 1.1 – Référentiel.

Remarque. La fonction à valeurs vectorielles $\vec{U}^*(M)$ peut être générale. Elle peut ne pas vérifier les conditions cinématiques auxquelles est soumis le champ des vitesses réelles. Le référentiel R peut ne pas être galiléen.

Evoquons maintenant le cas d'un changement de repère au cours de la modélisation. Soit un autre référentiel R^* et un autre champ $\vec{U}^*(M)$.

Définition 2 : $\vec{U}^*(M)$ et $\vec{U}(M)$ définissent à l'instant t (fixé) le même mouvement virtuel de S observé respectivement dans R^* et dans R , si en chaque point M de S nous avons :

$$\vec{U}(M) = \vec{U}^*(M) + \vec{U}_e(M) \quad (1-1)$$

où \vec{U}_e désigne la vitesse d'entraînement réelle de M , c'est-à-dire la vitesse dans R du point lié à R^* qui, à l'instant t , coïncide avec le point M .

Définition 3 : Un mouvement virtuel défini sur S à t fixé est dit rigidifiant (mvr) si le champ des vitesses U en un point M est un distributeur $\{ C \}$ (ou torseur), c'est-à-dire

$$\{ C \} = \begin{cases} \vec{\omega} \\ \vec{U}(M) \end{cases} \quad (1-2)$$

$\vec{\omega}$ rotation (résultante), $\vec{U}(M)$ vitesse en M (moment résultant).

1.1.2 Représentation des efforts (représentation fonctionnelle)

Soit Σ un système extérieur à S (les points intérieurs à Σ et à S sont donc disjoints).

Définition 4 : A un instant donné t et pour un espace vectoriel de mouvements virtuels U , les efforts exercés par Σ sur S sont représentés par une fonction linéaire et continue à valeurs réelles (ou forme linéaire continue \mathcal{L}) définie sur U telle que :

$$P^* = \mathcal{L}(U). \quad (1-3)$$

Le nombre réel P^* est appelé puissance virtuelle de ces efforts dans le mouvement virtuel U .

Ce mode de représentation « fonctionnelle » des efforts peut paraître à première vue abstrait et moins intuitif que celui plus classique effectué au moyen de champs de forces. Pourtant, comme nous l'avons observé dans l'introduction de ce chapitre, il ne fait que traduire des expériences courantes : tension d'une courroie d'alternateur, poids d'une valise, etc... La puissance virtuelle a donc une signification physique incontestable.

Exemples

- a) Cas du point matériel : si $U(M)$ est la vitesse du point M ,

$$P^* = \mathcal{L}(U) = \vec{F} \cdot \vec{U}, \quad (1-4)$$

définit la force \vec{F} appliquée en M .

- b) Cas du corps rigide : soit $U(M)$, un Torseur $\{ C \}$, tel que :

$$\{ C \} = \begin{cases} \vec{\omega} \\ \vec{U}(o) = \vec{U}(M) + \vec{OM} \wedge \vec{\omega} \end{cases} \quad (1-5)$$

P^* se définit alors grâce à une forme linéaire sur $\{ C \}$, c'est-à-dire sur les deux vecteurs $\vec{\omega}$ et $\vec{U}(o)$ tels que :

$$P^* = \vec{T} \cdot \vec{U}(o) + \vec{M}(o) \cdot \vec{\omega} \quad (1-6)$$

ce qui définit la résultante \vec{T} et le moment $\vec{M}(o)$ en o du torseur des efforts associés au torseur $\{ C \}$.

- c) Efforts définis par une densité volumique de forces : soit l'élément de volume dv entourant le point M de S , les forces élémentaires exercées sur dv sont alors $\vec{f} dv$ d'où :

$$P^* = \int_S \vec{f} \cdot \vec{U} dv = \mathcal{L}(U). \quad (1-7)$$