MODELUL MATEMATIC AL PROBLEMELOR DE TRANSPORT MILITAR

MATHEMATICAL MODEL OF MILITARY TRANSPORTATION PROBLEMS

Lect. dr. Florentina-Loredana DRAGOMIR*

Rezumat: *Problema transportului este una din activităţile importante ce stau la baza organizării şi desfăşurării acţiunilor militare, transportul ocupând un timp important din totalul activităţilor desfăşurate de trupe.*

Cuvinte-cheie*: programare liniară; model matematic.*

Abstract: *The transportation issue is one of the important activities underlying the organization and conduct of military actions, as transportation actually takes up a significant amount of time within the activities of the troops.*

Keywords: *linear programming; mathematical model*

Introducere

În cazul problemelor de transport militar cu capacităţi limitate, modelul matematic prezintă o condiţionare şi anume cantitatea x_{ij} ce se repartizează trebuie să fie mai mică decât cantitatea maximă, care se va nota cu z_{ij}, ce poate fi expediată pe un anumit itinerar *(i,j)* de transport rutier, naval sau aerian.

Modelul matematic al unei probleme de transport militar cu capacităţi limitate[85], în cazul existenţei a *m* depozite (centre) A_i, $i = \overline{1,m}$, în care se află cantităţile a_i, $i = \overline{1,m}$ şi *n* beneficiari B_j, $j = \overline{1,n}$, fiecare având nevoie de cantităţile b_j, $j = \overline{1,n}$, în condiţiile în care există limitări z_{ij} impuse de beneficiari sau datorită itinerarului de deplasare, implică determinarea *minimului* unei funcţii liniare de forma:

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{1}$$

* Lect. Univ. dr. la Universitatea Naţională de Apărare „CAROL”, E-mail *dragomir.florentina@myunap.net*

85 Gherghe Vrănceanu, Şt. Mititelu, *Probleme de cercetare operaţională*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1998, pp.123-128.

pe mulţimea soluţiilor nenegative ale sistemului:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1,2,...m \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i, \quad j = 1,2,...n \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,...., m; \quad j = 1,2,..., n \tag{4}$$

$x_{ij} \leq z_{ij}$, pentru anumiţi *i* şi *j*, în care: a_i>0; b_j>0; $c_{ij} \geq 0$. S-a considerat că $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Valorile x_{ij}, $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ reprezintă cantităţile ce trebuiesc transportate de la depozitul A_i, $i = \overline{1,m}$ la beneficiarul B_j, $j = \overline{1,n}$, în condiţiile limitărilor z_{ij} iar c_{ij}, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ reprezintă coeficienţii criteriului de eficacitate (km, cost, timp etc.) dintre depozitul A_i, $i = \overline{1,m}$ şi beneficiarul B_j, $j = \overline{1,n}$. Condiţia (4) poate fi considerată ca având loc pentru toate itinerarele *(i,j).* Dacă anumite itinerare trebuie excluse atunci se poate că $z_{ij} = 0$; pentru itinerare care nu au nici o restricţie se poate lua $z_{ij} = M$, unde *M* este un număr foarte mare care nu va influenţa cu nimic soluţia problemei. Soluţionarea problemelor de transport în cazul limitării capacităţii de transport se face cu metodele cunoscute, dar ţinând cont de condiţionarea capacităţii de transport pe anumite itinerare. Aceasta impune ca înainte de a trece la soluţionarea propriu-zisă să se verifice dacă datele nu prezintă aspecte contradictorii. Pentru ca problema să fie soluţionată este necesar ca sumele cantităţilor z_{ij} luate separat pentru fiecare linie şi fiecare coloană să fie mai mari sau cel puţin egale cu a_i sau b_j corespunzători. Astfel, dacă pentru o anumită linie *i* toate celulele sunt supuse la limitări şi avem:

$$z_{i1} + z_{i2} + \cdots z_{ij} + \cdots z_{in} < a_i \tag{5}$$

atunci problema nu se poate soluţiona, pentru că în acest caz va rămâne obligatoriu la depozitul A_i o anumită cantitate egală cu diferenţa: $a_i - \sum_{j=1}^{n} z_{ij}$ chiar dacă în fiecare celulă a liniei *i* se va repartiza cantitatea z_{ij} maximă, deoarece $\sum_{j=1}^{n} z_{ij} < a_i$.

În cazul când toate celulele unei linii sunt supuse la limitări, iar: $\sum_{j=1}^{n} z_{ij} = a_i$ (6) linia respectivă trebuie să fie *exclusă* din calcule întrucât în această situaţie există o singură posibilitate şi anume să se atribuie în fiecare celulă a liniei i cantitatea maximă z_{ij}. Aspectele prezentate pentru linii sunt valabile şi pentru coloane.

I. Exemplu de calcul

Se consideră că din localităţile A_i, $i = \overline{1,4}$, trebuie expediate în raioanele B_j, $j = \overline{1,6}$ tehnică de luptă de acelaşi tip. Cantităţile existente în localităţile A_i, $i = \overline{1,4}$, cele necesare în raioanele B_j, $j = \overline{1,6}$ evaluate în eşaloane de transport de valoarea unui tren, precum şi timpul necesar deplasării pe calea ferată şi limitările exprimate în trenuri, pe diferite itinerare de transport, sunt prezentate în tabelul 1. Se cere să se organizeze astfel transportul prin repartizarea garniturilor pe beneficiari încât consumul total de $ore \cdot tren$ să fie *minim*.

Tabelul nr.1

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_1	2* 4	3* 6	2* 8	5* 3	1* 5	2* 7	**15**
A_2	6* 2	5	4	7	4* 3	6	**16**
A_3	4* 4	5	2	6* 9	8	2* 3	**18**
A_4	3* 3	6	5* 7	2	8* 9	5	**19**
b_j	**15**	**11**	**9**	**10**	**13**	**10**	**68**

Din tabelul nr. 1 rezultă că un număr de 14 itinerare sunt limitate în privinţa capacităţii de transport (valorile z_{ij} sunt marcate cu steluţă). Se observă că toate itinerarele care încep cu A_1 precum şi cele ce se termină cu B_1 au limitări ale capacităţii de transport, limitări a căror sumă este egală cu 15 pentru A_1 şi cu 15 pentru B_1. Deci cantităţile ce vor fi expediate de la A_1 şi cele ce urmează a fi primite de B_1 sunt determinate în mod *unic*. Ca urmare, linia corespunzătoare lui A_1

şi coloana corespunzătoare lui B_1 se vor exclude din calculele următoare; în fiecare coloană se vor scădea din valorile lui b_j valorile date de limitările cuprinse în linia A_1, iar în fiecare linie se vor scădea din valorile lui a_i, valorile limitărilor cuprinse în coloana B_1. Se obţine tabelul nr.2 care conţine numai 3 linii şi 5 coloane în care sunt limitări pentru 5 itinerare (cele marcate cu steluţă).

Dacă se fac sumele z_{ij} pe linii şi pe coloane se constată că ele sunt mai mari decât a_i respectiv b_j, deoarece în celulele unde nu sunt limitări se poate lua o valoare oricât de mare.

Tabelul nr.2

B_j / A_i	**B_2**	**B_3**	**B_4**	**B_5**	**B_6**	**a_i**
A_2	5	4	7	4* 3	6	**10**
A_3	5	2	6* 9	8	2* 3	**14**
A_4	6	5* 7	2	8* 9	5	**16**
b_j	**8**	**7**	**5**	**12**	**8**	**40**

Se va aplica pentru determinarea unei soluţii iniţiale de bază, de exemplu, metoda elementului minim pe linie, cu specificul corespunzător datelor problemei de transport cu capacităţi limitate. În tabelul nr. 2 cel mai mic timp de transport din linia A_2 este 3, aflat în celula (2,5). Beneficiarului B_5 trebuie să i se expedieze 12 garnituri. Dacă nu ar fi nici o limitare, în celula (2,5) s-ar fi repartizat de la A_2 la B_5 cele 10 garnituri existente. Dar cum în celula (2,5) este o limitare de 4 garnituri, din cele 10 garnituri ale lui A_2 se vor repartiza numai 4 garnituri pentru B_5. Deci mai rămân în A_2 încă 6 garnituri de expediat iar B_5 mai urmează să primească 8 garnituri de la alte depozite. În linia A_2, valoarea imediat superioară este 4 care se află în celula (2,3), căruia i se va repartiza $x_{23} = \min\{6,7\} = 6$ garnituri. Aplicând şi celorlalte linii procedeul expus, se vor obţine datele din tabelul nr.3.

Tabelul nr.3

B_j / A_i	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	a_i
A_2	5	**6** 4	7	**4** 4* 3	6	**10**
A_3	**8** 5	**1** 2	6* 9	**3** 8	**2** 2* 3	**14**
A_4	6	5* 7	**5** 2	**5** 8* 9	**6** 5	**16**
b_j	**8**	**7**	**5**	**12**	**8**	**40**

Soluţia din tabelul nr.3 conduce pentru funcţia obiectiv la valoarea:

$$f = 6\cdot 4 + 4\cdot 3 + 8\cdot 5 + 1\cdot 2 + 3\cdot 8 + 2\cdot 3 + 5\cdot 2 + 5\cdot 9 + 6\cdot 5 = 193$$

Funcţia obiectiv are valoarea 193 *ore tren*.

Verificarea optimalităţii soluţiei obţinute se va executa cu ajutorul metodei distributiv-modificată.

În problemele de transport cu capacităţi limitate pentru soluţia de bază se consideră necesar să se realizeze tot *m+n-1* necunoscute mai mari decât zero $x_{ij} > 0$, dar acestea să se găsească în celulele ocupate, *fără* celulele satisfăcute la maximum. Celulele satisfăcute la maximum ca şi celulele libere pot fi luate în calcul în cazul unei soluţii de bază degenerată pentru completarea necesarului de *m+n-1* necunoscute mai mari strict decât zero. Deci celulele satisfăcute la maximum pot avea în rezolvarea problemei - după caz - atât rol de celulă ocupată cât şi de celulă liberă.

Repartiţia obţinută în tabelul nr. 3 este nedegenerată deoarece numărul de restricţii liniar independente *m+n-1*=7 este egal cu numărul de valori obţinute pentru necunoscutele $x_{ij} > 0$ (în afară de celulele ocupate la maximum). Se întocmeşte o nouă matrice (tabelul nr.4) în care se trec valorile coeficienţilor c_{ij} din datele iniţiale şi în care se marchează celulele cu valorile x_{ij} mai mari ca zero obţinute prin metoda elementului minim pe linie (celulele satisfăcute la maximum nu se iau în calcul).

Tabelul nr.4

v_j / u_i	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
u_2	5	4	7	3	6
u_3	5	2	9	8	3
u_4	6	7	2	9	5

Se formează sistemul de ecuaţii pentru determinarea valorilor u_i şi v_j ţinând cont de coeficienţii corespunzători repartiţiei existente $(x_{ij} > 0)$ şi de relaţia $c_{ij} = u_i + v_j$, $i = \overline{2,4}$, $j = \overline{2,6}$.

$$
\begin{aligned}
u_2+v_3&=4\\
u_3+v_2&=5\\
u_3+v_3&=2\\
u_3+v_5&=8\\
u_4+v_4&=2\\
u_4+v_5&=9\\
u_4+v_6&=5
\end{aligned} \tag{7}
$$

Sistemul are 7 ecuaţii liniare şi 8 necunoscute (u_2, u_3, u_4, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6). Pentru rezolvarea sistemului (7) i se atribuie arbitrar necunoscutei u_2 valoarea zero ($u_2=0$) şi se obţine următoarea soluţie: $u_2=0$, $u_3=-2$, $u_4=-1$, $v_2=7$, $v_3=4$, $v_4=3$, $v_5=10$, $v_6=6$. Se construieşte matricea din tabelul nr. 5 în care pe lângă valorile u_i şi v_j obţinute din sistemul (7) se vor trece şi sumele $\overline{c_{ij}} = u_i + v_j$, $i = \overline{2,4}$, $j = \overline{2,6}$.

Tabelul nr. 5

v_j / u_i	7	4	3	10	6
0	7	4	3	10	6
-2	5	2	1	8	4
-1	6	3	2	9	5

Se construieşte matricea din tabelul nr. 6 cu diferenţele $s_{ij} = c_{ij} - \overline{c_{ij}}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Tabelul nr. 6

v_j u_i	7	4	3	10	6
0	-2	0	4	**-7***	0
-2	0	0	8	0	**-1***
-1	0	34	0	0	0

Pentru ca soluţia să fie finală şi optimă datele trebuie să îndeplinească simultan următoarele condiţii:- în celulele ocupate la maximum să se obţină diferenţe negative sau zero;- în celulele libere trebuie să apară diferenţe pozitive sau zero. Se constată că într-o celulă liberă s-a obţinut o valoare negativă (-2), ceea ce înseamnă că soluţia trebuie optimizată. Se ia dintre diferenţele negative ale celulelor libere, diferenţa cea mai mare în valoare absolută. În problema analizată există o singură valoare negativă (-2) ce corespunde celulei (2,2). Se caută în ciclu valoarea minimă din colţurile *pare* ale ciclului:

$$x_{22} = \max \alpha = \min\{x_{32}, x_{23}\} = \min\{8,6\} = 6 .$$

Se obţine o nouă repartiţie a cărei funcţie scop are valoarea:

$$f = 193 + s_{22} \cdot x_{22} = 193 - 2 \cdot 6 = 193 - 12 = 181 \ ore \cdot tren$$

Tabelul nr. 7

B_j A_I	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	$\mathbf{A_i}$
A_2	**6**					**10**
A_3	**2**	**7**		**3**		**14**
A_4			**5**	**5**	**6**	**16**
$\mathbf{b_j}$	**8**	**7**	**5**	**12**	**8**	**40**

Se verifică prin aplicarea algoritmului metodei distributiv-modificată dacă repartiţia din tabelul nr. 7 este optimă. Se întocmeşte tabelul nr. 8.

Tabelul nr.8

v_j / u_i	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
u_2	5	4	7	3	6
u_3	5	2	9	8	3
u_4	6	7	2	9	5

Se formează sistemul de ecuaţii:

$$\begin{array}{l} u_2+v_2=5 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_3=2 \\ u_3+v_5=8 \\ u_4+v_4=2 \\ u_4+v_5=9 \\ u_4+v_6=5 \end{array} \qquad (8)$$

cu soluţia: $u_2=0$, $u_3=0$, $u_4=1$, $v_2=5$, $v_3=2$, $v_4=1$, $v_5=8$, $v_6=4$ (s-a ales $u_2=0$).

Se întocmeşte tabelul nr. 9 ($\overline{c_{ij}} = u_i + v_j$, $i=\overline{2,4}$, $j=\overline{2,6}$).

Tabelul nr. 9

v_j / u_I	5	2	1	8	4
0	5	2	1	8	4
0	5	2	1	8	4
1	6	3	2	9	5

Se construieşte o nouă matrice (tabelul nr. 10) cu diferenţele $s_{ij} = c_{ij} - \overline{c_{ij}}$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$.

Tabelul nr.10

v_j / u_i	5	2	1	8	4
0	0	2	6	**-5***	2
0	0	0	8	0	**-1***
1	0	4	0	0	0

Dacă se analizează datele se constată că sunt îndeplinite condiţiile pentru obţinerea soluţiei finale şi optime şi se trece la reconstituirea matricei cu datele iniţiale, unde este prezentată soluţia finală şi *optimă* pe ansamblu activităţii (tabelul nr.11).

Tabelul nr.11

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	$\mathbf{a_i}$
A_1	**2** 4	**3** 6	**2** 8	**5** 3	**1** 5	**2** 7	**15**
A_2	**6** 2	**6** 5	4	7	**4** 3	6	**16**
A_3	**4** 4	**2** 5	**7** 2	9	**3** 8	**2** 3	**18**
A_4	**3** 3	6	7	**5** 2	**5** 9	**6** 5	**19**
$\mathbf{b_j}$	**15**	**11**	**9**	**10**	**13**	**10**	**68**

Valoarea funcţiei obiectiv pentru întreaga activitate desfăşurată devine:

$$f_{\min} = 181 + 2\cdot 4 + 3\cdot 6 + 2\cdot 8 + 5\cdot 3 + 1\cdot 5 + 2\cdot 7 + 6\cdot 2 + 4\cdot 4 + 3\cdot 3 = 294\ ore\cdot tren$$

Concluzii

În cadrul unor astfel de activităţi pot să apară cazuri când trebuie să se ţină cont de capacitatea de tranzit a diferitelor itinerare şi de timpul de parcurs pe fiecare itinerar. De exemplu, sunt situaţii când pe anumite tronsoane de cale ferată într-un anumit sens de circulaţie, se limitează posibilităţile de transport pentru nevoile militare la un anumit număr de trenuri sau garnituri pentru un anumit interval de timp. Pe şosele, pe drumuri pot fi situaţii când datorită unor condiţii tehnice, economice, tactice trebuie să se limiteze numărul mijloacelor de transport la un anumit număr pentru o anumită perioadă de timp.

BIBLIOGRAFIE

VRĂNCEANU Gh., MITITELU Şt., *Probleme de cercetare operaţională*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1998.